12 Trasformazione della coordinata spaziale e temporale

Dalla dimostrazione della contrazione delle lunghezze (si veda il capitolo 11), può essere derivata in alternativa la trasformazione per lo spazio e il tempo senza dover presupporre il postulato della costanza della velocità della luce per qualsiasi velocità relativa tra sorgente luminosa e osservatore.

Consideriamo due sistemi di riferimento unidimensionali in movimento l'uno rispetto all'altro a velocità costante $\boldsymbol{v}$. Due osservatori $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ si trovino in quiete ciascuno nelle origini delle coordinate $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ dei due sistemi di riferimento e misurino il tempo $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t'}$, rispettivamente. Le origini delle coordinate dei due sistemi di riferimento coincidano all'istante $\boldsymbol{t = 0}$ per $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{t' = 0}$ per $\boldsymbol{O'}$.

Assumeremo, come discusso nel capitolo 9, che per tempi successivi le misurazioni dei tempo $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t'}$ possano essere discordanti, quindi non assumiamo a priori che sia $\boldsymbol{t = t'}$ nemmeno per $\boldsymbol{v \ll c}$.

Per illustrare con maggiore chiarezza le relazioni tra i sistemi di riferimento, ci atterremo nei successivi diagrammi alle seguenti regole:

- In ogni diagramma è presente un osservatore in quiete. Un secondo osservatore si muove lungo l'asse x alla velocità $\boldsymbol{v}$.
- La trasformazione è considerata dal punto di vista dell'osservatore in quiete, e quindi viene usato il suo tempo. L'osservatore in quiete è evidenziato in grigio nei diagrammi.
- Il sistema di riferimento dell'osservatore in movimento è raffigurato con linee tratteggiate.
- La trasformazione riguarda sempre il calcolo della coordinata spaziale dell'osservatore in movimento in funzione delle coordinate spaziali e temporali dell'osservatore in quiete.

Trasformazione della coordinata spaziale per $\boldsymbol{v \ll c}$

Se la velocità relativa $\boldsymbol{v}$ tra i sistemi di riferimento è considerevolmente inferiore alla velocità della luce, allora i due osservatori non percepiscono alcuna contrazione della lunghezza in direzione del movimento. Nella figura 18 l'osservatore $\boldsymbol{O}$ è in quiete. $\boldsymbol{t}$ è il tempo misurato da $\boldsymbol{O}$.

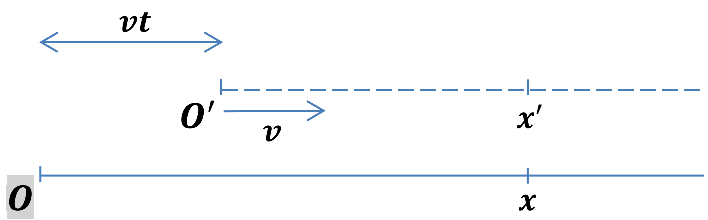

Fig. 18

Secondo Figura 18, dal punto di vista di $\boldsymbol{O}$, si ottengono le relazioni:

$$\boldsymbol{x = x' + vt} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x' = x - vt} \qquad (12.1)$$

La figura 19 mostra la trasformazione dal punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$:

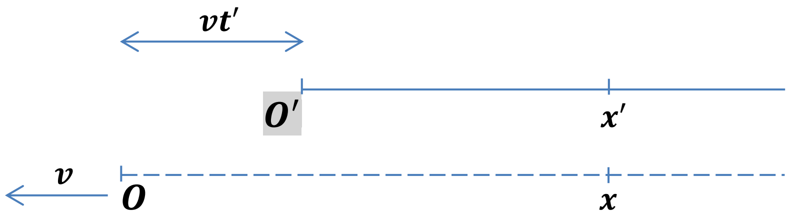

Fig. 19

In questo caso le relazioni sono:

$$x' = x - vt' \quad \Rightarrow \quad x = x' + vt' \qquad (12.2)$$

E se in (12.2) si sostituisce $\boldsymbol{x'}$ ricavato dalla relazione (12.1), si ottiene:

$$x = x - vt + vt' \quad \Rightarrow \quad t = t' \qquad (12.3)$$

La (12.3) mostra che la coordinata temporale per $\boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{c}$ è <u>invariante</u>.

Le relazioni (12.1) e (12.3) corrispondono alla trasformazione galileiana e sono valide nel contesto della meccanica classica per $\boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{c}$:

$$x' = x - vt \quad (12.1); \qquad t = t' \quad (12.3)$$

<u>Trasformazione della coordinata spaziale per una velocità $\boldsymbol{v}$ qualunque</u>

Consideriamo ora la situazione dal punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O}$, questa volta per qualunque velocità $\boldsymbol{v}$:

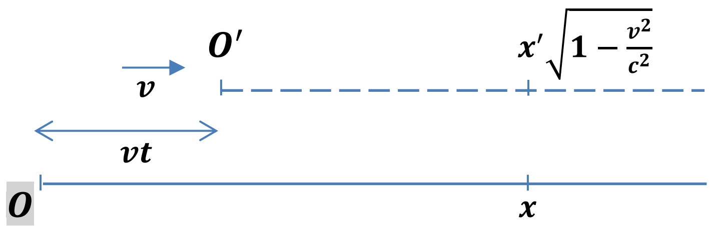

Fig. 20

Come dimostrato nel capitolo 11, l'osservatore $\boldsymbol{O}$ percepisce una contrazione della lunghezza della distanza tra $\boldsymbol{O'}$ e $\boldsymbol{x'}$, così che per lui il punto corrispondente a $\boldsymbol{x}$ si trova, sul sistema di riferimento $\boldsymbol{O'}$, alla coordinata $\boldsymbol{x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ come mostrato in figura 20.

Da figura 20 si può costatare che per l'osservatore $\boldsymbol{O}$ risulta quanto segue:

$$x = x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + vt \quad \Rightarrow$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.4)$$

La relazione (12.4) rappresenta il valore della coordinata spaziale $\boldsymbol{x'}$ nel sistema di riferimento dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$ in funzione delle coordinate di spazio e tempo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ del sistema di riferimento di $\boldsymbol{O}$.

Consideriamo ora la situazione dal punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$:

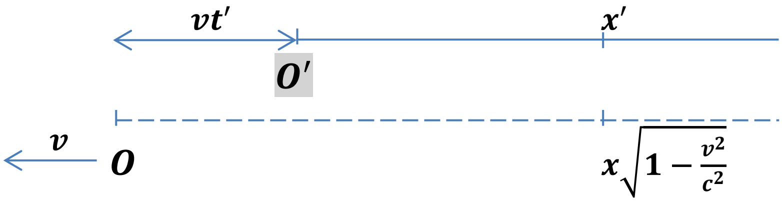

Fig. 21

L'osservatore $\boldsymbol{O'}$ percepisce una contrazione della lunghezza della distanza tra $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{x}$, così che per lui il punto corrispondente di $\boldsymbol{x'}$ si trova, nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O}$, alla coordinata $x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, come mostrato in Figura 21.

Da figura 21 si può anche dedurre che per l'osservatore $\boldsymbol{O'}$ risulta:

$$x' + vt' = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.5)$$

Va notato che $\boldsymbol{t'}$ rappresenta il tempo di $\boldsymbol{O'}$, generalmente diverso dal tempo $\boldsymbol{t}$ dell'osservatore $\boldsymbol{O}$, come discusso nel capitolo 9.

Le relazioni (12.4) e (12.5) rappresentano le trasformazioni di coordinate spaziali per velocità qualunque, dal punto di vista di due osservatori in moto relativo tra loro.

Trasformazione della coordinata temporale:

La trasformazione per la coordinata temporale può essere derivata dalle relazioni (12.4) e (12.5).

Dalla relazione (12.5) otteniamo:

$$x' = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt' \qquad (12.6)$$

Uguagliando le relazioni (12.4) e (12.6) si ottiene:

$$\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt' \;\Rightarrow$$

$$x - vt = x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - vt'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;\Rightarrow$$

$$-vt = -x\frac{v^2}{c^2} - vt'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;\Rightarrow$$

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.7)$$

Usando un metodo analogo può essere derivata per t in funzione di t' e x' la relazione seguente:

$$t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.8)$$

Le trasformazioni di coordinate espresse dalla (12.4) e dalla (12.7) corrispondono nella stessa forma alle componenti della trasformazione di Lorentz, che descrive la variazione delle coordinate spaziali e temporali tra sistemi di riferimento per velocità comunque elevate nell'ambito della teoria della relatività ristretta.

In questo capitolo è stato mostrato come le trasformazioni dello spazio e del tempo per velocità qualunque degli osservatori possano essere derivate dal fenomeno della contrazione della lunghezza relativistica.