14 La trasformazione di Lorentz e le sue applicazioni

Con le trasformazioni delle coordinate di Lorentz, che abbiamo dedotto nel capitolo 12 sulla base del principio di conservazione dell'energia e senza far uso del postulato della costanza della velocità della luce, siamo ora in grado di risolvere alcune importanti applicazioni fisiche a velocità elevate e di discuterne i risultati.

Consideriamo un osservatore $\boldsymbol{O}$ localizzato nell'origine di un sistema di riferimento inerziale unidimensionale contrassegnato dalla coordinata $\boldsymbol{x}$. Un secondo osservatore $\boldsymbol{O'}$ si muovi lungo l'asse X con la velocità costante $\boldsymbol{v}$.

Supponendo che all'istante $\boldsymbol{t = 0}$ le posizioni degli osservatori $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ coincidano, si possono applicare le seguenti trasformazioni attribuite a Lorentz:

$$\boldsymbol{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.1) \qquad e \qquad \boldsymbol{t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.2)$$

Nelle (14.1) e (14.2), $\boldsymbol{x'}$e $\boldsymbol{t'}$ rappresentano le misure della posizione e del tempo di un punto **P** dal punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$. Esse sono espresse in funzione della posizione $\boldsymbol{x}$ e del tempo $\boldsymbol{t}$ che, per lo stesso punto, sono misurati dall'osservatore $\boldsymbol{O}$.

Risolvendo la (14.1) e la (14.2) per $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{t}$, si ottiene:

$$\boldsymbol{x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.3) \qquad e \qquad \boldsymbol{t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.4)$$

Analogamente, nelle (14.3) e (14.4), $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{t}$ rappresentano le misure della posizione e del tempo di un punto **P** visto dall'osservatore $\boldsymbol{O}$, in dipendenza della posizione $\boldsymbol{x'}$ e del tempo $\boldsymbol{t'}$ misurati dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$ per lo stesso punto.

È importante notare che il punto **P** non deve trovarsi in quiete in uno dei due sistemi di riferimento. Di conseguenza, sia $\boldsymbol{x}$ che $\boldsymbol{x'}$ possono essere dipendenti dal tempo.

Poiché in questa trattazione vengono presi in considerazione solo movimenti rettilinei uniformi, considereremo soltanto le seguenti dipendenze temporali di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x'}$, con velocità costanti $\boldsymbol{v_p}$ e $\boldsymbol{v'_p}$:

$$\boldsymbol{x = x_0 + v_p t} \quad (14.5) \qquad e \qquad \boldsymbol{x' = x'_0 + v'_p t'} \quad (14.6)$$

Con i seguenti parametri:

$\boldsymbol{v_p}$ è la velocità di **P** in $\boldsymbol{O}$.

$\boldsymbol{x_0}$ è la posizione all'istante $\boldsymbol{t = 0}$ di **P** in $\boldsymbol{O}$.

$\boldsymbol{v'_p}$ è la velocità di **P** in $\boldsymbol{O'}$.

$\boldsymbol{x'_0}$ è la posizione all'istante $\boldsymbol{t' = 0}$ di **P** in $\boldsymbol{O'}$.

Dalle relazioni (14.1) e (14.3) risulta che, se $\boldsymbol{x_0 = 0}$, allora è anche: $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ e viceversa.

Inoltre risulta che se $\boldsymbol{v'_p = 0}$, allora $\boldsymbol{v_p = v}$ e se $\boldsymbol{v_p = 0}$, allora $\boldsymbol{v'_p = -v}$ e viceversa.

Riassumendo:

$$\boldsymbol{x_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; x'_0 = 0} \quad (14.7)$$

$$\boldsymbol{v'_p = 0 \;\Rightarrow\; v_p = v} \quad (14.8)$$

$$\boldsymbol{v_p = 0 \;\Rightarrow\; v'_p = -v} \quad (14.9)$$

Seguono esempi di applicazione della trasformazione di Lorentz.

1) Tempo in un punto in quiete nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O}$ – Il tempo non è assoluto

Un punto P, con le coordinate $\boldsymbol{x = x_0}$ e $\boldsymbol{t = 0}$, è in quiete nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O}$ $\boldsymbol{(v_p = 0)}$.

Dalla relazione (14.2) si ottiene:

$$\boldsymbol{t' = \frac{-\frac{x_0 v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Per $\boldsymbol{x_0 > 0}$ e $\boldsymbol{v > 0}$ risulta: $\boldsymbol{t' < 0}$.

Quindi, mentre l'osservatore $\boldsymbol{O}$ misura il tempo $\boldsymbol{t = 0}$ per il punto $\boldsymbol{x_0}$, l'osservatore $\boldsymbol{O'}$ percepisce per lo stesso punto un tempo precedente a quello di $\boldsymbol{O}$.

2) Barretta in quiete in $\boldsymbol{O'}$ - Contrazione della lunghezza

Una barretta si trova in quiete nel sistema di riferimento dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$ e ha la lunghezza $\boldsymbol{l'}$. Le estremità della barretta hanno le coordinate $\boldsymbol{x_1 = 0}$ e $\boldsymbol{x_2 = l}$ all'istante $\boldsymbol{t = 0}$ dell'osservatore $\boldsymbol{O}$.

Dalla relazione (14.1) per le estremità della barretta nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O'}$ risulta:

$$\boldsymbol{x'_1 = 0\,;\; x'_2 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x'_2 - x'_1 = l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \quad \Rightarrow$$

Per la lunghezza della barretta nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O}$ si ottiene:

$$\boldsymbol{l = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'osservatore $\boldsymbol{O}$ percepisce una contrazione della lunghezza della barretta che si trova in quiete nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O'}$.

3) Tempo proprio t' dell'osservatore O' - Dilatazione del tempo

Per l'osservatore $\boldsymbol{O'}$ risulta nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O}$: $\boldsymbol{x_0 = 0}$ e $\boldsymbol{v_p = v}$. Dalla (14.5) segue: $\boldsymbol{x = vt}$. Inserito in (14.2) risulta:

$$\boldsymbol{t' = \frac{t - \frac{tv^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$\boldsymbol{O}$ percepisce una dilatazione del tempo rispetto a $\boldsymbol{O'}$. In altre parole, gli intervalli di tempo che trascorrono in $\boldsymbol{O'}$ appaiono dilatati nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O}$.

4) Un fotone viene emesso nel sistema di riferimento O' al tempo $t' = 0$ e alla coordinata $x'_0 = 0$ - Costanza della velocità della luce

Con $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ e $\boldsymbol{v'_p = c}$ dalla (14.6) si ottiene: $\boldsymbol{x' = ct'}$. Questa relazione inserita nelle espressioni (14.3) e (14.4) conduce alle:

$$\boldsymbol{x = \frac{ct' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad e \qquad \boldsymbol{t = \frac{t' + \frac{ct'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Poiché se $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ è anche $\boldsymbol{x_0 = 0}$, dalla (14.5) risulta per la velocità del fotone nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O}$:

$$\boldsymbol{v_p = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad v_p = \frac{t'(c + v)}{t'(1 + \frac{v}{c})} \quad \Rightarrow \quad v_p = c}$$

Nonostante i sistemi di riferimento si muovano fra di loro con la velocità relativa $\boldsymbol{v}$, entrambi gli osservatori $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ misurano dalla loro prospettiva, che il fotone si muove alla stessa velocità $\boldsymbol{c}$.

5) Punto in movimento nel sistema di riferimento O' - Composizione delle velocità

Un punto si muove nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O'}$ a velocità costante $\boldsymbol{v'_p}$ e ha la posizione $\boldsymbol{x' = 0}$ per $\boldsymbol{t' = 0}$. Dalla (14.6) segue: $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ e di conseguenza $\boldsymbol{x_0 = 0}$. Le relazioni (14.5) e (14.6) si riducono alle seguenti:

$$\boldsymbol{x = v_p t} \qquad e \qquad \boldsymbol{x' = v'_p t'}$$

Sostituendo queste relazioni nelle (14.3) e (14.4) si ottiene:

$$\boldsymbol{v_p t = \frac{v'_p t' + v t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (\boldsymbol{a}) \qquad e \qquad \boldsymbol{t = \frac{t' + \frac{v'_p v t'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (\boldsymbol{b})$$

Da (b) risulta:

$$\boldsymbol{t' = \frac{t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_p v}{c^2}}}$$

Quest'ultima equazione sostituita in (a) ci dà:

$$\boldsymbol{v_p = \frac{v'_p + v}{1 + \frac{v'_p v}{c^2}}} \qquad (\boldsymbol{c})$$

La relazione (c) esprime la composizione relativistica delle velocità.

6) <u>Due fotoni raggiungono contemporaneamente l'osservatore $\boldsymbol{O'}$. Questo è valido anche dal punto di vista di $\boldsymbol{O}$? - Simultaneità</u>

Due fotoni vengono emessi nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O'}$ all'istante $\boldsymbol{t' = 0}$ dalle posizioni $\boldsymbol{-x'_0}$ e $\boldsymbol{x'_0}$ in direzione di $\boldsymbol{O'}$. Secondo la (14.6) risulta per il primo e per il secondo fotone:

$$\boldsymbol{x'_1 = -x'_0 + ct'} \qquad e \qquad \boldsymbol{x'_2 = x'_0 - ct'}$$

I due fotoni raggiungono contemporaneamente la posizione dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$ alla coordinata $\boldsymbol{x' = 0}$ dopo l'intervallo $\boldsymbol{t' = {x'_0}/{c}}$.

Dall'osservatore $\boldsymbol{O}$ può essere calcolato l'istante dell'emissione dei fotoni tramite la relazione (14.4).

Al punto di partenza risulta per il primo fotone: $\boldsymbol{t' = 0}$ e $\boldsymbol{x' = -x'_0}$.

Dalla (14.4) risulta:

$$t_{01} = \frac{\frac{-x'_0 v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Al punto di partenza risulta per il secondo fotone: $\boldsymbol{t' = 0}$ e $\boldsymbol{x' = x'_0}$.

Dalla (14.4) risulta quindi:

$$t_{02} = \frac{\frac{x'_0 v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Si può costatare che per l'osservatore $\boldsymbol{O}$ i fotoni non vengono emessi simultaneamente. Il secondo fotone è emesso successivamente al primo.

In quale momento i fotoni raggiungono la posizione dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$ secondo il punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O}$?

Abbiamo visto che per il primo e per il secondo fotone risulta quanto segue:

$$x'_1 = -x'_0 + ct' \quad e \quad x'_2 = x'_0 - ct'$$

Inserite nella (14.4), otteniamo per i tempi dei due fotoni:

$$t_1 = \frac{t' + \frac{(-x'_0 + ct')v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad e \quad t_2 = \frac{t' + \frac{(x'_0 - ct')v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Poiché $\boldsymbol{t'} = {}^{x'_0}/_{c}$ è il tempo che trascorre per entrambi i fotoni nel sistema di riferimento $\boldsymbol{O'}$,

otteniamo:

$$t_1 = t_2 = \frac{x'_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x'_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Quindi, per l'osservatore $\boldsymbol{O}$, i fotoni raggiungono la posizione dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$ simultaneamente.

Per l'osservatore $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O'}$ si muove alla velocità $\boldsymbol{v}$. Quindi, fino alla posizione dell'osservatore $\boldsymbol{O'}$, il primo fotone deve percorrere, a pari velocità $\boldsymbol{c}$, una distanza maggiore rispetto al secondo fotone. Ciò nonostante, i fotoni raggiungono l'osservatore $\boldsymbol{O'}$ contemporaneamente perché, dal punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O}$, il primo fotone viene emesso anteriormente al secondo.