5 Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse[1]

In diesem Kapitel werden wir sehen, wie sich die Formel für die Geschwindigkeitsabhängigkeit der trägen Masse aus dem zweiten Prinzip der Dynamik in Verbindung mit dem Äquivalenzprinzip von Energie und Masse ableiten lässt.

Wir nehmen an, dass auf einen Massepunkt eine konstante Kraft $\boldsymbol{F}$ einwirkt.

Im ersten Kapitel wurde gezeigt, dass, falls der Weg in der gleichen Richtung der Kraft verläuft, die infinitesimale Arbeit der Kraft durch folgende Differentialgleichung ausgedrückt werden kann:

$$\boldsymbol{Fds = dE = mvdv + v^2dm} \qquad (1.5)$$

In (1.5) stellt $\boldsymbol{m}$ ein Maß für die Trägheit des materiellen Körpers dar. Physikalisch gesehen handelt es sich aber nicht nur um die Masse des Körpers, sondern um die Masse des gesamten „Systems“, das aus dem Körper mit seiner kinetischen Energie besteht, denn im Laufe dieses Abschnitts werden wir sehen, dass nicht nur der Körper selber eine Masse besitzt sondern auch seine Energie.

Die Relation (1.5) zeigt, dass eine Energiezufuhr im Allgemeinen nicht nur einen Zuwachs der Geschwindigkeit des Massepunktes hervorbringt ($\boldsymbol{mvdv}$), sondern auch eine Zunahme seiner Trägheit bewirkt ($\boldsymbol{v^2dm}$).

Wenn die Geschwindigkeit erheblich niedriger als die Lichtgeschwindigkeit ist, dann fällt für die Trägheit nur der Beitrag der Masse des Körpers ins Gewicht, da die kinetische Energie niedrig bleibt.

Bei hohen Geschwindigkeiten ist die Masse der kinetischen Energie nicht mehr vernachlässigbar. Diese wird bei Geschwindigkeiten nahe der des Lichtes vorherrschend und hemmt somit die Beschleunigung der Teilchen.

Wenn also angenommen wird, dass eine konstante elektrische Kraft auf eine fortschreitend zunehmende Masse einwirkt, dann sollte es nachvollziehbar sein, warum ein Teilchen nur auf eine bestimmte Geschwindigkeit und nicht weiter beschleunigt werden kann.

Es ist zu berücksichtigen, dass dieser letzte Punkt besonders wichtig für das intuitive Verständnis des Vorganges ist, der in diesem Kapitel zur Herleitung der ersten relativistischen Gleichung führen wird.

Im ersten Kapitel wurde erwähnt, dass die Gleichung (1.5) durch Integration nicht lösbar ist, es sei denn, man kennt eine weitere Beziehung zwischen Energie und Masse.

Die in den vorhergehenden Kapiteln 3 und 4 durchgeführten Herleitungen füllen diese Lücke, indem sie die fehlende Relation liefern, denn aus der Gleichung der Äquivalenz von Energie und Masse $\boldsymbol{E = \Delta mc^2}$ kann gefolgert werden, dass nicht nur Masse sich in Energie

[1] Folgende Herleitung ist von mir unabhängig von anderen Physikern in November 2016 ausgearbeitet worden. Erst nach der Herausgabe der ersten Auflage dieser Arbeit erfuhr ich von einem Leser, dass eine ähnliche Herleitung bereits 1961 von Professor Franz von Krbek in seinem Buch "Grundzüge der Mechanik" durchgeführt wurde.

umwandeln kann, sondern auch, dass jede Energiezufuhr von einer Massenzunahme begleitet wird.

Mit anderen Worten: „*Masse ist Energie, und Energie besitzt Masse*“[2].

Hierauf gestützt, lässt sich feststellen, dass die Trägheit, die der zugeführten Energie $\boldsymbol{dE}$ in (1.5) zugeordnet werden kann, folgender Massenzunahme $\boldsymbol{dm}$ entspricht:

$$\boldsymbol{Fds = dE = c^2 dm} \qquad (5.1)$$

Die Substitution von $\boldsymbol{Fds}$ durch $\boldsymbol{c^2 dm}$ ermöglicht es, das Differenzial $\boldsymbol{ds}$ aus der Gleichung (1.5) zu eliminieren. Somit ergibt sich eine integrierbare Differentialgleichung nur als Funktion der Masse und der Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{c^2 dm = mvdv + v^2 dm} \qquad (5.2)$$

Das Ergebnis der Integration von (5.2) ergibt die Relation der Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit.

Die Relation (5.2) kann auch wie folgt umgeschrieben werden:

$$\boldsymbol{\frac{dm}{m} = \frac{v}{c^2 - v^2} dv} \qquad (5.3)$$

Wenn die zweite Seite der Gleichung (5.3) zwischen den Integrationsgrenzen $\mathbf{0}$ und dem unbestimmten Wert $\boldsymbol{v}$ der Geschwindigkeit integriert wird und mit $\boldsymbol{m_0}$ die Masse bezeichnet wird, die der Geschwindigkeit Null entspricht (die sogenannte Ruhemasse), ergibt sich dann:

$$\boldsymbol{\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = \int_0^v \frac{v}{c^2 - v^2} dv = -\frac{1}{2} \int_0^v \frac{d(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{[ln(m)]_{m_0}^{m} = -\frac{1}{2} [\ln(c^2 - v^2)]_0^v} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{ln \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} ln \frac{c^2}{c^2 - v^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{m}{m_0} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (5.4)$$

Die Relation (5.4) drückt die Abhängigkeit der Trägheit eines Körpers der Masse $\boldsymbol{m_0}$ von der Geschwindigkeit aus.

[2] Albert Einstein, Leopold Infeld – Die Evolution der Physik, Seite 267 – Weltbild Verlag

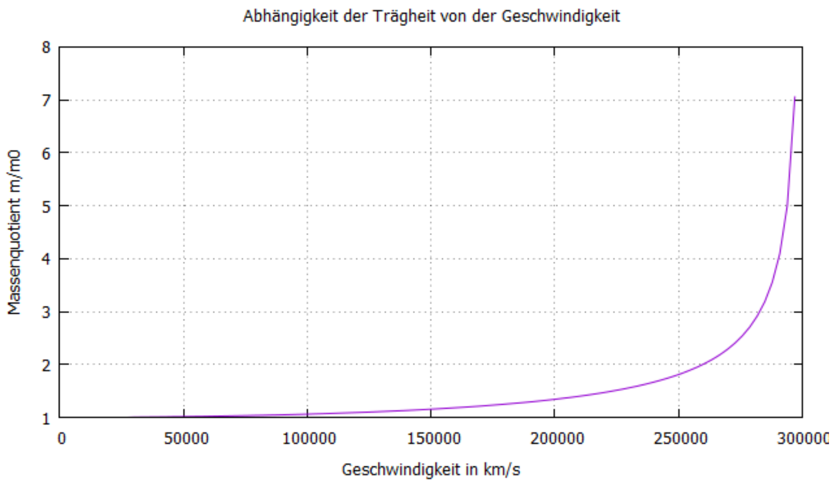

Abb. 5

Somit wird eines der wichtigsten Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie bestätigt ohne Verwendung der Lorentz-Transformationen, welche die Grundlage der Einstein'schen Theorie darstellen.

In seinem Werk "Relativitätstheorie" erklärt Wolfgang Pauli:

> "*Dieser Ausdruck für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit wurde speziell für die Masse des Elektrons zum erstenmal von Lorentz abgeleitet, unter der Annahme, daß auch die Elektronen bei der Bewegung die Lorentz-Kontraktion erleiden.*"[3]

Eines ist sicher: Mit der alternativen Herleitung der Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit haben wir das Anwendungsgebiet der klassischen Physik endgültig verlassen und sind in den Bereich der Relativitätstheorie eingetreten, zumal die betreffende Formel den Lorentz-Faktor enthält.

Bemerkenswert ist jedoch, dass in der vorliegenden Arbeit die Formel (5.4) von der klassischen Physik ausgehend und <u>ohne die Hypothese der Längenkontraktion</u> hergeleitet wurde, so wie es hingegen beim relativistischen Beweis auf der Grundlage der Lorentz-Transformation geschieht.

Es wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit öfter von der Beziehung (5.4) Gebrauch gemacht, um weitere relativistische Formeln abzuleiten.

So ist mit $\boldsymbol{m_0}$ immer die invariante Masse (auch Ruhemasse genannt) eines Körpers bei Geschwindigkeit gleich Null gemeint. Mit $\boldsymbol{m}$ wird stattdessen die gesamte Masse bezeichnet, die einem Körper in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit zugeordnet werden kann[4].

---

[3] Wolfgang Pauli – Relativitätstheorie, Seite 97 – Springer Verlag

[4] Es soll an dieser Stelle nochmal klargestellt werden: Zur Trägheit des Körpers tragen zwei Massenanteile bei: (i) zum einen die Masse $\boldsymbol{m_0}$ des Körpers selbst, (ii) zum anderen die Masse, die der kinetischen Energie des Körpers zugeordnet werden kann. Die gesamte Masse $\boldsymbol{m}$ ist deren Summe und kann um mehrere Größenordnungen größer sein als die Masse $\boldsymbol{m_0}$ des Körpers.

Von (5.4) ausgehend, wenn beide Seiten der Gleichung mit der Geschwindigkeit multipliziert werden, ergibt sich die Formel für den Impuls im allgemeinen Fall:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (5.5)$$

Aus der Relation (5.5) lässt sich in Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen erkennen, dass ein Körper die Lichtgeschwindigkeit weder überschreiten noch erreichen kann.

Die unmittelbare Folge dieser Schlussfolgerung ist die Unanwendbarkeit der Galilei-Transformation bei beliebigen Geschwindigkeiten, mit der Konsequenz, dass es im weiteren Verlauf dieser Abhandlung auf die Hilfe jeglicher Transformation verzichtet werden muss.

Ich möchte an dieser Stelle noch vorwegnehmen, dass sich beim Multiplizieren beider Seiten der Gleichung (5.4) mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit die Formel für die gesamte (d.h. innere + kinetische) Energie eines Körpers in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit ergibt:

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (5.6)$$

Der Beweis dazu wird im nächsten Abschnitt erbracht.

Der in den Kapiteln 3 und 4 angeführte Beweis des Äquivalenzprinzips zwischen Energie und Masse ermöglicht es, der einem Körper übertragenen Energie ihre entsprechende Trägheit zuzuweisen. Man erhält somit die erforderliche Relation zur Lösung der Differentialgleichung aus dem zweiten Prinzip der Dynamik. Durch die Integration erhält man die Relation der Abhängigkeit der Trägheit eines Körpers von seiner Geschwindigkeit. Auf diese Weise wird eines der wichtigsten Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie bewiesen, ohne auf die Lorentz-Transformation zurückzugreifen und somit ohne die Längenkontraktion vorauszusetzen.