15 Geschwindigkeitsabhängigkeit der Frequenz

In diesem Kapitel werden wir die Veränderung der Frequenz der elektromagnetischen Strahlung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit untersuchen.

Hierfür beziehen wir uns erneut auf die Phasen II und III des im vierten Kapitel betrachteten physikalischen Vorgangs, bei der die Annihilation eines Teilchens und die darauffolgende Emission von zwei Photonen beschrieben werden.

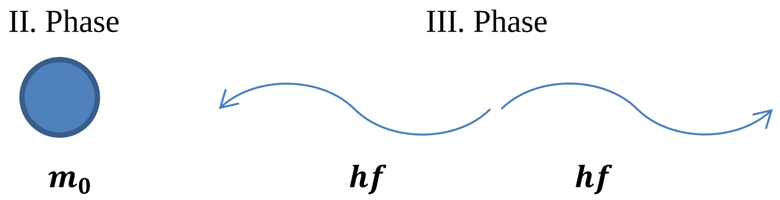

Abb. 22

Wir nehmen einen Beobachter an, der sich relativ zum Teilchen in die gleiche Richtung eines Photons mit einer niedrigen Geschwindigkeit bewegt.

Wie bereits im dritten Kapitel festgestellt wurde, wird er dann, wegen des optischen Dopplereffekts, folgende Frequenzverschiebung messen[1]:

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \qquad (15.1)$$

Ist die Geschwindigkeit des Beobachters jedoch nahe der des Lichtes, dann zeigt sich, dass der Ausdruck (15.1) nicht mehr korrekt ist.

Um die Frequenzveränderung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit im allgemeinen Fall zu berechnen, werden wir deswegen den Energie- und Impulserhaltungssatz auf die Phasen II und III der beschriebenen Naturerscheinung anwenden. Da sich die gesamte Masse des Teilchens in die Energie der Photonen umwandelt, gilt:

$$m_0 c^2 = 2hf \qquad (15.2)$$

Wenn f_1 und f_2 die vom Beobachter gemessenen Frequenzen in, bzw. entgegen der Bewegungsrichtung darstellen, kann wegen der Energieerhaltung vor und nach der Annihilation des Teilchens folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = hf_1 + hf_2 \qquad (15.3)$$

Durch die Anwendung des Impulserhaltungssatzes ergibt sich außerdem:

$$mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{hf_1}{c} - \frac{hf_2}{c} \qquad (15.4)$$

[1] Folgende Relation (15.1) ist mit den Messinstrumenten, die den Physikern heutzutage zur Verfügung stehen, für v<<c experimentell verifizierbar.

Wenn der Ausdruck $2hf/c^2$ aus der Gleichung (15.2) in die Formeln (15.3) und (15.4) anstelle von m_0 eingesetzt wird, ergibt sich durch algebraische Vereinfachung folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = \dfrac{2f}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ f_1 - f_2 = \dfrac{2f\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Wenn nach f_1 und f_2 aufgelöst wird, dann erhalten wir:

$$f_1 = f\frac{(1+\frac{v}{c})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad f_2 = f\frac{(1-\frac{v}{c})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Oder auch in kompakter Form:

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\gamma \qquad (15.5)$$

Wobei γ den sogenannten Lorentzfaktor darstellt. Dabei ist zu bemerken, dass die Relationen (15.1) und (15.5) bis auf diesen Faktor identisch sind, und dass die klassische Formel (15.1) einen Grenzfall der relativistischen Relation (15.5) für $v \ll c$ darstellt (und konsequenterweise für $\gamma = 1$).

Durch einfache algebraische Umformungen ergeben sich schließlich für die Frequenzverschiebung in, bzw. entgegen der Bewegungsrichtung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit folgende Ausdrücke:

$$f_1 = f\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad ; \quad f_2 = f\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad (15.6)$$

Die Gleichungen (15.6) stimmen mit den relativistischen Formeln der Frequenzverschiebung überein.

In den Abbildungen 23 und 24 zeigt die violette Kurve den klassischen Verlauf und die grüne Kurve den relativistischen Verlauf der Frequenzverschiebung.

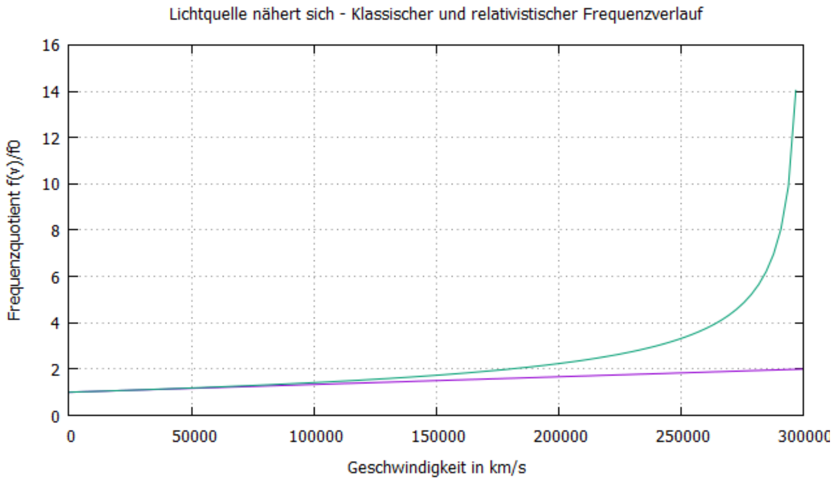

Abb. 23

Nach der klassischen Formel der Frequenzverschiebung (15.1) für eine Lichtquelle, die sich dem Beobachter nähert (Abb. 23), kann sich die Frequenz bis zur Lichtgeschwindigkeit maximal verdoppeln, während nach der relativistischen Formel (15.6), für hohe Geschwindigkeiten der Lichtquelle, die Frequenz gegen Unendlich strebt.

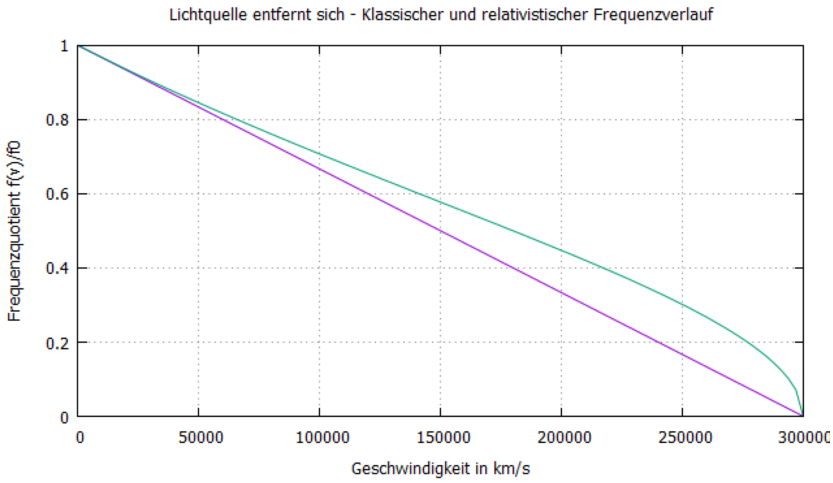

Abb. 24

Wenn stattdessen sich die Lichtquelle vom Beobachter entfernt, ist die Abweichung zwischen den Verläufen der Formel (15.1) und (15.6) nicht mehr so relevant (Abb. 24).

In diesem Fall ist es auch noch interessant zu bemerken, dass nicht nur die relativistische Relation (15.6), sondern auch schon die klassische (15.1) darauf hinweist, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten werden kann, weil wir für die Gleichung $\boldsymbol{f' = f(1 - v/c)}$, mit $\boldsymbol{v > c}$ einen negativen und somit unzulässigen Wert der Frequenz erhalten.

In dieser Hinsicht besitzt die klassische Gleichung (15.1) allerdings nicht die Schärfe der relativistischen Relation (15.6), welche schon mathematisch weder für $\boldsymbol{v > c}$ noch für $\boldsymbol{v = c}$ definiert ist.

Die Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes auf die experimentelle Beobachtung der Elektron-Positron-Annihilation ermöglicht es, die Frequenzverschiebung der elektromagnetischen Strahlung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der aussendenden Quelle zu ermitteln.