6 Il calcolo dell'energia cinetica e totale

Col teorema del lavoro e dell'energia cinetica può essere calcolata l'energia cinetica $\boldsymbol{E_c}$ apportata a un corpo materiale dal lavoro di una forza $\boldsymbol{F}$ agente su di esso.

La trattazione abitualmente fatta con la meccanica classica può essere esposta come segue:

Supponendo la massa costante, si può utilizzare l'equazione differenziale (1.2) che, come abbiamo visto nel primo capitolo, è una conseguenza diretta della (1.1):

$$\vec{F} = m_0\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m_0\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.1)$$

L'apporto infinitesimale all'energia cinetica arrecato dal lavoro elementare $\boldsymbol{Fds}$ è di conseguenza[1]:

$$dE_c = Fds = m_0 v dv \qquad (1.2)$$

Integrando per una velocità iniziale nulla si ottiene l'espressione dell'energia cinetica:

$$E_c = m_0\int_0^v v\,dv = \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad (v \ll c) \qquad (6.1)$$

Poiché ricavata dalla (1.1), la (6.1) esprime l'energia cinetica di un corpo di massa $\boldsymbol{m_0}$ solo nei casi in cui, per velocità $\boldsymbol{v}$ notevolmente inferiori a quella della luce, l'inerzia del corpo materiale resta praticamente costante.

Nel caso più generale, che prevede anche velocità prossime a quella della luce, si dovrà invece utilizzare la seguente espressione …

$$dE_c = Fds = v^2dm + mvdv \qquad (1.5)$$

… in accordo con quanto esaminato nel primo capitolo.[2]

Se prendiamo in considerazione le due relazioni esaminate nel quinto capitolo …

$$Fds = dE_c = c^2dm \qquad (5.1)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (5.4)$$

… vediamo che per sostituzione, esse ci consentono di eliminare la massa $\boldsymbol{m}$ dalla (1.5).

[1] Così come in precedenza, viene anche qui presupposto che lo spostamento infinitesimale ds proceda nella stessa direzione della forza F.
[2] Si tenga presente che, in questo caso come anche in seguito, prenderemo sempre in considerazione corpi materiali rigidi non vincolati e quindi privi di energia potenziale. I corpi qui considerati possono essere perciò assimilati alle particelle subatomiche. Premesso ciò, è quindi evidente che il lavoro elementare espresso dalla (1.5) si trasformi interamente in energia cinetica.

In questo modo otteniamo l'espressione necessaria che ci consente di risolvere l'equazione differenziale (1.5) così come segue.

Dalla (5.1) ricaviamo:

$$\boldsymbol{dm = \frac{dE_c}{c^2}} \qquad (6.2)$$

Sostituendo la (5.4) e la (6.2) nella (1.5) otteniamo la seguente relazione fra l'energia meccanica apportata a un corpo materiale sotto forma del lavoro elementare di una forza $\boldsymbol{F}$ e la sua velocità $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{dE_c = v^2 \frac{dE_c}{c^2} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v dv} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{(1 - \frac{v^2}{c^2}) dE_c = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{dE_c = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv} \qquad (6.3)$$

Mettendo a confronto le relazioni (1.2) e (6.3), si può costatare che in entrambe il differenziale dell'energia cinetica $\boldsymbol{dE_c}$ è espresso soltanto in dipendenza della massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ e della velocità $\boldsymbol{v}$.

Solo la relazione (6.3) rappresenta però la forma più generalmente valida per il calcolo dell'energia cinetica a velocità comunque elevate.

È facile verificare che la (6.3) si riduce alla (1.2) nel caso in cui $\boldsymbol{v << c}$.

Così come la (1.2) ci dà per integrazione l'energia cinetica di un corpo materiale supponendone costante l'inerzia, l'integrazione della (6.3) dovrà ora risolvere il teorema del lavoro e dell'energia cinetica nel caso applicativo più generale, cioè anche per velocità prossime a quella della luce.

Per il calcolo dell'energia cinetica si procederà, analogamente alla (1.2), con il calcolo dell'integrale della (6.3) fra il valore iniziale nullo e quello generico $\boldsymbol{v}$ della velocità:

$$\boldsymbol{E_c = m_0 \int_0^v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} v dv} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_c = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \int_0^v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \qquad \Rightarrow$$

$$E_c = -\frac{1}{2}m_0c^2\left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^v \qquad \Rightarrow$$

$$E_c = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \qquad \Rightarrow$$

$$E_c = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \qquad (6.4)$$

La relazione (6.4) ci dà l'espressione dell'energia cinetica di un corpo in funzione della sua massa e velocità.

Essa coincide con la formula corrispondente dell'energia cinetica ricavata con considerazioni relativistiche.

Si può mostrare, oltre che con lo sviluppo in serie di Taylor anche con il seguente procedimento, che la (6.4) si riduce alla (6.1) per $v << c$:

Infatti, per velocità notevolmente inferiori a quella della luce il quoziente $v^4/4c^4$, essendo d'ordine superiore, ha un valore trascurabile rispetto al rapporto v^2/c^2 e quindi può essere aggiunto al radicale della (6.4) senza che ne sia alterato il valore:

$$E_c = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^4}{4c^4}}} - m_0c^2 \qquad \Rightarrow$$

Il denominatore è la radice quadrata del quadrato di un binomio, perciò:

$$E_c = \frac{m_0c^2}{1-\frac{v^2}{2c^2}} - m_0c^2 \qquad \Rightarrow$$

$$E_c = \frac{\cancel{m_0c^2} - \cancel{m_0c^2} + \frac{1}{2}m_0v^2}{1-\frac{v^2}{2c^2}}$$

Questa espressione si riduce quindi alla (6.1) per $v << c$.

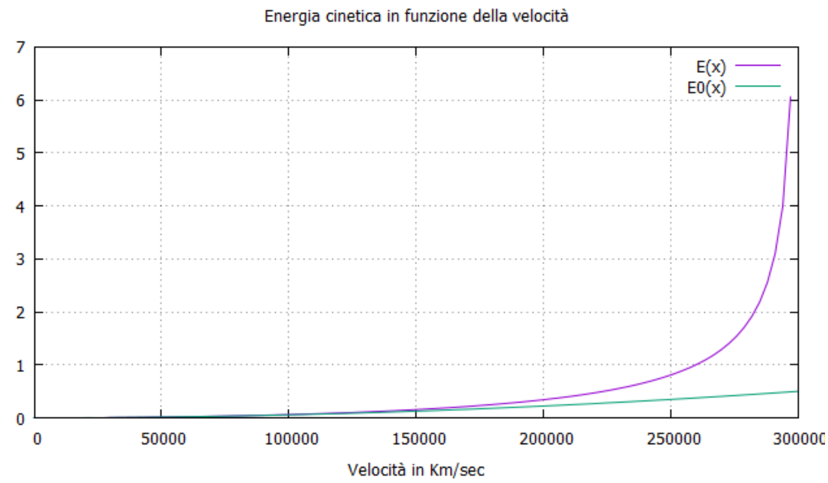

Fig. 6

In figura 6 sono messe a confronto le curve dell'energia cinetica ricavate per mezzo della (6.1) (curva verde) e della (6.4) (in violetto).

Si osserva che, per basse velocità, le due curve effettivamente coincidono. Esse divergono però sempre di più per velocità che si avvicinano a quella della luce.

Prendendo in considerazione l'espressione (5.4), la (6.4) può anche scriversi così:

$$\boldsymbol{mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_c + m_0c^2} \qquad (6.5)$$

La (6.5) ci fa pervenire a quest'importante risultato:

Poiché il secondo membro della (6.5) è uguale alla somma delle energie cinetica e interna, ne risulta che $\boldsymbol{mc^2}$ o meglio $\boldsymbol{m_0c^2/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ è pari all'energia totale del corpo materiale in funzione della sua velocità.

Questo conferma quanto era stato anticipato ma non dimostrato nel capitolo precedente tramite la (5.6).

> Le espressioni ricavate nei capitoli 4 e 5 del lavoro elementare e della massa in funzione della velocità ci consentono di eliminare per sostituzione la massa dipendente dalla velocità dall'equazione differenziale del lavoro. L'integrazione di quest'ultima ci fornisce come risultato finale l'espressione dell'energia cinetica e, contemporaneamente, quella dell'energia totale di un corpo materiale in funzione della sua velocità. Anche queste espressioni si trovano in perfetto accordo con quelle ricavate con considerazioni relativistiche.