5 Dipendenza della massa dalla velocità[1]

In questo capitolo vedremo come la formula relativistica della massa inerziale in dipendenza dalla velocità possa essere derivata dal secondo principio della dinamica in connessione con il principio di equivalenza dell'energia e della massa.

Supponiamo che su un punto materiale agisca una forza costante $\boldsymbol{F}$.

Come abbiamo visto nel primo capitolo, nel caso in cui il percorso sia parallelo alla forza agente, il lavoro elementare della forza $\boldsymbol{Fds}$, o meglio l'apporto di energia elementare $\boldsymbol{dE}$ fornito al corpo materiale, può essere espresso nel caso più generale dalla seguente equazione differenziale:

$$\boldsymbol{Fds = dE = mvdv + v^2dm} \qquad (1.5)$$

Nella (1.5), $\boldsymbol{m}$ rappresenta una misura dell'inerzia del corpo materiale: dal punto di vista fisico tuttavia, non si tratta solo della massa del corpo, bensì della massa dell'intero "sistema" che è composto dal corpo materiale e dalla sua energia cinetica.

Infatti, nel corso di questo capitolo vedremo che così come al corpo stesso, anche alla sua energia, è associabile una massa.

La relazione (1.5) mostra che un apporto di energia, generalmente, non solo provoca un aumento della velocità del punto materiale ($\boldsymbol{mvdv}$), ma ne causa anche l'aumento dell'inerzia ($\boldsymbol{v^2dm}$).

A velocità molto inferiori a quella della luce, solo l'apporto della massa del corpo è rilevante per l'inerzia, giacché l'energia cinetica si mantiene bassa.

Ad alte velocità, la massa associabile all'energia cinetica non è più trascurabile. Essa diventa prevalente a velocità prossime a quella della luce, inibendo così l'accelerazione delle particelle.

Quindi, se si considera una forza elettrica costante applicata a una massa in aumento progressivo, allora dovrebbe essere chiaro perché una particella può essere accelerata solo fino a una certa velocità e non oltre.

Si tenga presente che quest'ultimo punto è particolarmente importante per la comprensione intuitiva del processo che in questo capitolo porterà alla derivazione della prima equazione relativistica.

Nel primo capitolo è stato affermato che l'equazione (1.5) non può essere risolta mediante integrazione, eccetto che non si conosca un'altra relazione tra energia e massa.

[1] La seguente dimostrazione è stata eseguita da me indipendentemente da altri fisici nel novembre 2016. Solo dopo la pubblicazione della prima edizione di questo lavoro ho appreso da un lettore che una dimostrazione simile era già stata pubblicata nel 1961 dal professor Franz von Krbek col suo libro "Grundlagen der Mechanik".

Le dimostrazioni fatte nei capitoli precedenti 3 e 4 colmano questa lacuna fornendo la relazione mancante, infatti, dall'equazione dell'equivalenza di energia e massa $\boldsymbol{E = \Delta mc}^2$ si può dedurre che non solo la massa si può trasformare in energia, ma anche che ogni apporto energetico è accompagnato da un aumento di massa.

In altre parole, *"la massa è energia e l'energia possiede massa*“[2].

Basandosi su questo principio, si può affermare che all'inerzia, che può essere assegnata all'energia $\boldsymbol{dE}$ nella (1.5), corrisponde il seguente aumento di massa $\boldsymbol{dm}$:

$$\boldsymbol{Fds = dE = c^2 dm} \qquad (5.1)$$

La sostituzione di $\boldsymbol{Fds}$ con $\boldsymbol{c^2dm}$ rende possibile eliminare il differenziale $\boldsymbol{ds}$ dall'equazione (1.5). In questo modo si ottiene un'equazione differenziale integrabile solo in funzione della massa e della velocità:

$$\boldsymbol{c^2 dm = mvdv + v^2 dm} \qquad (5.2)$$

Il risultato dell'integrazione della (5.2) ci darà la relazione di dipendenza dell'inerzia dalla velocità.

La (5.2) può essere scritta nella seguente forma:

$$\boldsymbol{\frac{dm}{m} = \frac{v}{c^2 - v^2} dv} \qquad (5.3)$$

Integrando il secondo membro fra il limite zero e il generico valore $\boldsymbol{v}$ della velocità e specificando con $\boldsymbol{m_0}$ la massa corrispondente a velocità nulla, vale a dire la cosiddetta massa a riposo, otteniamo:

$$\boldsymbol{\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = \int_0^v \frac{v}{c^2 - v^2} dv = -\frac{1}{2}\int_0^v \frac{d(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{[ln(m)]_{m_0}^{m} = -\frac{1}{2}[\ln(c^2 - v^2)]_0^v} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{ln\frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} ln\frac{c^2}{c^2 - v^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{m}{m_0} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (5.4)$$

La relazione (5.4) esprime la dipendenza dell'inerzia di un corpo materiale di massa $\boldsymbol{m_0}$ dalla velocità.

[2] Albert Einstein, Leopold Infeld – Die Evolution der Physik, pagina 267 – Weltbild Verlag

In questo modo viene confermato uno dei risultati più importanti della teoria della relatività ristretta senza l'uso delle trasformazioni di Lorentz, le quali costituiscono la base della teoria di Einstein.

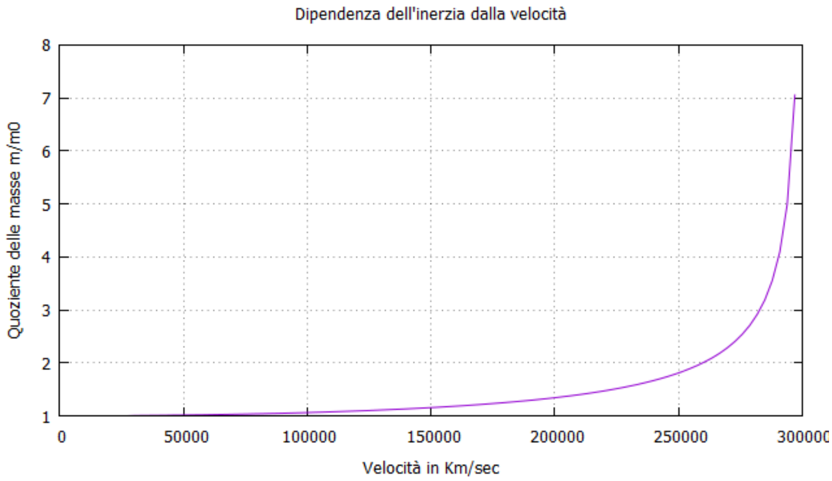

Fig. 5

Nella sua opera intitolata "Relativitätstheorie" Wolfgang Pauli afferma:

"*Questa espressione per la dipendenza della massa dalla velocità è stata ricavata per la prima volta da Lorentz per la massa dell'elettrone, con l'ipotesi che anche gli elettroni in movimento subiscano la contrazione di Lorentz.*"[3]

Una cosa è certa: Con la derivazione alternativa della dipendenza della massa dalla velocità abbiamo abbandonato definitivamente il campo di applicazione della fisica classica e siamo entrati nell'ambito della teoria della relatività, tanto più che la formula in questione contiene il fattore di Lorentz.

La cosa rimarchevole è però che nella presente trattazione la formula (5.4) è stata dimostrata partendo dalla fisica classica e senza premettere l'ipotesi della contrazione delle lunghezze, così come invece presuppone la dimostrazione usuale basata sulla trasformazione di Lorentz.

Della (5.4) faremo spesso uso in seguito per la dimostrazione di altre formule relativistiche.

In tutte le dimostrazioni sarà indicata con $\boldsymbol{m_0}$ la massa *propria* di un corpo materiale, anche chiamata massa a riposo. Con $\boldsymbol{m}$ s'intenderà invece la massa associabile a un corpo in moto in funzione della sua velocità[4].

Useremo la (5.4) ogni volta che ci servirà di passare da $\boldsymbol{m_0}$ a $\boldsymbol{m}$ e viceversa.

[3] Wolfgang Pauli – Teoria della Relatività, pag. 127 – Edizione Boringhieri.

[4] È importante chiarire che all'inerzia del corpo materiale contribuiscono due grandezze fisiche: l'una è la massa del corpo stesso (massa a riposo), l'altra è la massa che può essere associata alla sua energia cinetica. La massa totale è la somma di queste due masse e può essere di molti ordini di grandezza più elevata della massa a riposo del corpo materiale.

Dalla (5.4), moltiplicando i membri di destra e sinistra per la velocità, si perviene all'equazione della quantità di moto del punto materiale nel caso più generale:

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{m_0 \vec{v}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (5.5)$$

Dalla (5.5) si deduce, in accordo con le osservazioni sperimentali, che nessun corpo materiale può superare e neanche raggiungere la velocità della luce.

La conseguenza immediata di questa conclusione è l'inapplicabilità della trasformazione di Galilei a velocità qualunque, con la conseguenza che nel corso di questa trattazione si dovrà rinunciare all'aiuto di qualsiasi trasformazione.

Si noti che, moltiplicando i membri di destra e sinistra per la velocità della luce elevata al quadrato, dalla (5.4) si ottiene anche l'espressione dell'energia totale di un corpo materiale in funzione della sua velocità:

$$\boldsymbol{mc^2} = \frac{\boldsymbol{m_0 c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (5.6)$$

Si tenga presente che la (5.6) qui viene solo anticipata. La sua dimostrazione segue nel capitolo successivo.

La dimostrazione del principio di equivalenza fatta nei capitoli precedenti ci mette in grado di associare all'energia elementare fornita a un corpo materiale una corrispondente variazione d'inerzia. Si ottiene così la relazione necessaria per la risoluzione dell'equazione differenziale del lavoro, ricavata dal secondo principio della dinamica. Dall'integrazione si ricava la dipendenza dell'inerzia di un corpo materiale dalla sua velocità. In questo modo è dimostrato uno dei più importanti risultati della teoria della relatività ristretta, senza ricorrere alla trasformazione di Lorentz e quindi senza presupporre la contrazione delle lunghezze.