15 Dipendenza della frequenza dalla velocità

In questo capitolo analizzeremo la Dipendenza della frequenza elettromagnetica dalla velocità.

Allo scopo ci riferiamo alle fasi II e III dell'esperimento descritto nel quarto capitolo nel quale viene presa in considerazione l'annichilazione di una particella di massa $\boldsymbol{m_0}$ con conseguente emissione di due fotoni.

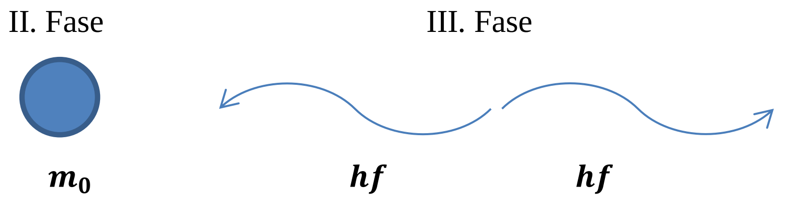

Fig. 22

Si supponga che un osservatore si muova rispetto alla particella nella stessa direzione in cui è emesso uno dei due fotoni.

Come già visto nel terzo capitolo, se la sua velocità $\boldsymbol{v}$ è considerevolmente inferiore a quella della luce, l'osservatore misurerà, in accordo con l'effetto Doppler, una variazione della frequenza dei fotoni emessi pari a:

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \qquad (15.1)$$

Se però la velocità dell'osservatore è prossima a quella della luce, l'espressione (15.1) non risulta più corretta.

Per calcolare qual è la variazione della frequenza in dipendenza della velocità nel caso più generale, applicheremo quindi i principi di conservazione alle fasi II e III servendoci anche delle acquisizioni fatte nei capitoli precedenti.

Poiché tutta la massa della particella si trasforma nell'energia dei fotoni, risulta:

$$m_0 c^2 = 2hf \qquad (15.2)$$

Se $\boldsymbol{f_1}$ e $\boldsymbol{f_2}$ sono le frequenze dei fotoni misurate dall'osservatore in direzione del moto e in direzione contraria, per il principio di conservazione dell'energia prima e dopo l'annichilazione della particella si ha:

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = hf_1 + hf_2 \qquad (15.3)$$

Con l'applicazione del principio di conservazione della quantità di moto si ottiene inoltre:

$$\boldsymbol{mv} = \frac{\boldsymbol{m_0 v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\boldsymbol{hf_1}}{\boldsymbol{c}} - \frac{\boldsymbol{hf_2}}{\boldsymbol{c}} \qquad (15.4)$$

Sostituendo il valore $\boldsymbol{2hf/c^2}$ di $\boldsymbol{m_0}$ ricavato dalla (15.2) nella (15.3) e nella (15.4) si ottiene, dopo aver semplificato, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = \dfrac{2f}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ f_1 - f_2 = \dfrac{2f\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Risolvendo rispetto alle incognite $\boldsymbol{f_1}$ e $\boldsymbol{f_2}$ otteniamo:

$$f_1 = f\frac{(1+\frac{v}{c})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad f_2 = f\frac{(1-\frac{v}{c})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Oppure, in forma compatta:

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\gamma \qquad (15.5)$$

Dove $\boldsymbol{\gamma}$ rappresenta il cosiddetto fattore di Lorentz. Va notato che le relazioni (15.1) e (15.5) sono identiche, tranne che per questo fattore, e che la formula classica (15.1) rappresenta un caso limite della relazione relativistica (15.5) per $\boldsymbol{v \ll c}$ e di conseguenza per $\boldsymbol{\gamma = 1}$.

Con semplici passaggi algebrici si perviene infine, per la variazione della frequenza elettromagnetica in funzione della velocità, alle seguenti espressioni:

$$f_1 = f\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad ; \quad f_2 = f\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad (15.6)$$

Le espressioni (15.6) sono in accordo con quelle ricavate per l'effetto Doppler ottico con ipotesi relativistiche.

Nelle figure 23 e 24 sono messi a confronto gli andamenti classici (curve violette) e relativistici (curve verdi) della frequenza elettromagnetica.

Secondo la formula classica (15.1), della variazione della frequenza elettromagnetica di una sorgente luminosa che si avvicina all'osservatore, la frequenza può al massimo raddoppiarsi mentre, secondo la formula relativistica (15.5), per velocità elevate della sorgente luminosa, la frequenza tende a un valore infinito.

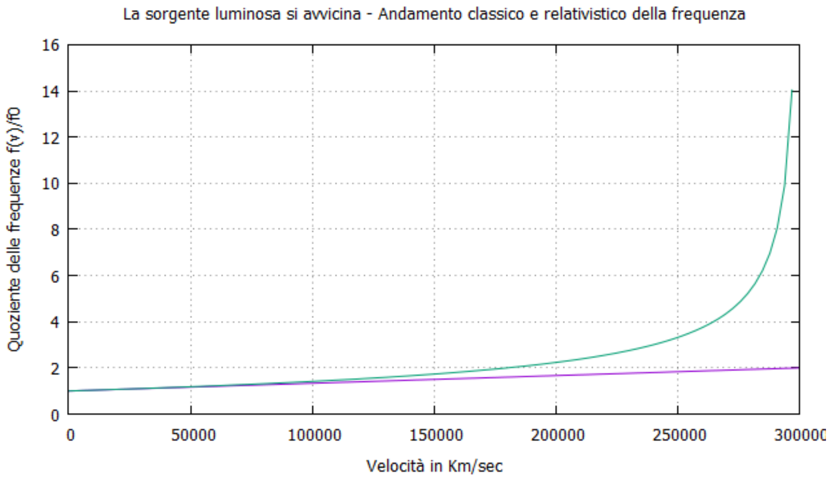

Fig. 23

Se invece la sorgente luminosa si allontana dall'osservatore (fig. 24) la differenza fra gli andamenti delle formule (15.1) e (15.6) non è può molto rilevante.

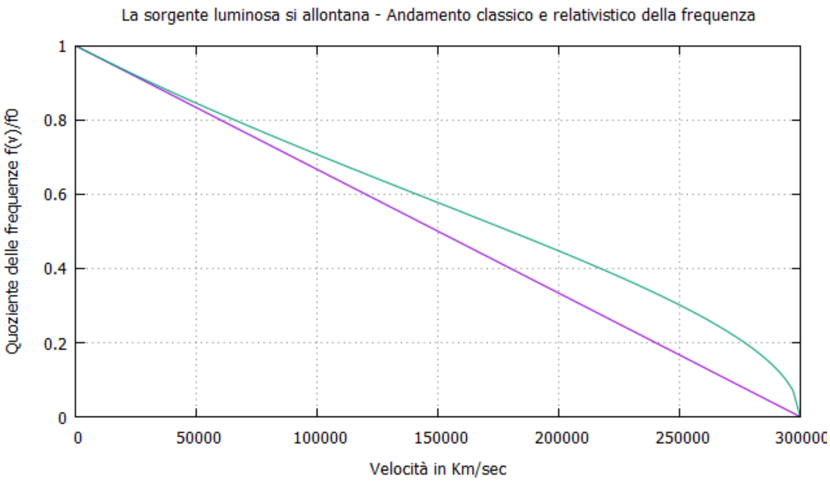

Fig. 24

In questo caso, è anche interessante notare che non solo la relazione relativistica (15.6), ma anche quella classica (15.1), mostra che la velocità della luce non può essere superata, infatti, in base all'equazione $\boldsymbol{f' = f(1 - v/c)}$, per $\boldsymbol{v > c}$ la frequenza assumerebbe un valore negativo e quindi non valido.

Sotto quest'aspetto, tuttavia, l'equazione classica (15.1) non possiede l'*efficacia* della relazione relativistica (15.6) che, già analiticamente, non è definita né per $\boldsymbol{v > c}$, né per $\boldsymbol{v = c}$.

L'applicazione dei principi di conservazione della quantità di moto e dell'energia all'osservazione sperimentale dell'annichilazione elettrone-positrone ci consente di calcolare la variazione di frequenza elettromagnetica in funzione della velocità della sorgente emettitrice.