16 Dipendenza dell'accelerazione dalla velocità

Nel secondo capitolo è già stato posto l'accento sul fatto che il secondo principio della dinamica in connessione con la formula di massa relativistica (5.4) conduce alla relazione dell'accelerazione relativistica (vedi Appendice A II).

Per il calcolo dell'accelerazione prendiamo anche in questo capitolo in considerazione il secondo principio della dinamica che, come già visto nel primo capitolo, nel caso più generale è espresso dalla:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (16.1)$$

Per derivare la dipendenza dalla velocità dell'accelerazione, vengono presentate qui di seguito due dimostrazioni:

Nella prima dimostrazione, per semplicità, si considera il caso in cui un corpo fisico si muove nella stessa direzione della forza che agisce su di esso.

In questo primo caso viene presentata una derivazione che si basa su un calcolo puramente scalare e che è adatta a descrivere il movimento delle particelle negli acceleratori lineari.

Nel secondo caso, viene utilizzato un calcolo vettoriale per derivare le due componenti longitudinale e trasversale dell'accelerazione. Questa seconda dimostrazione riguarda le situazioni in cui un corpo fisico non si muove nella stessa direzione della forza che agisce su di esso, come ad esempio si verifica nel movimento dei corpi celesti.

Entrambi i casi sono adatti a dimostrare che il secondo principio della dinamica rappresenta la relazione fondamentale per il calcolo dell'accelerazione relativistica.

Caso 1. Calcolo scalare.

Anche in questa dimostrazione ci limiteremo ai movimenti rettilinei nei quali, come nel caso degli acceleratori lineari, il percorso delle particelle procede nella stessa direzione della forza.

In questo caso la relazione (16.1) può essere utilizzata in forma scalare:

$$F = v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt} \qquad (16.2)$$

Poiché lo spostamento ha la stessa direzione della forza, per il lavoro infinitesimale arrecato può essere utilizzata la relazione (5.1) (vedi capitolo 5).

$$Fds = c^2 dm \qquad (5.1)$$

Dalla (5.1) si ricava:

$$dm = \frac{Fvdt}{c^2} \qquad (16.3)$$

Sostituendo la (16.3) e la relazione relativistica (5.4) della massa $\boldsymbol{m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ nella (16.1), dopo aver semplificato si ottiene:

$$\boldsymbol{F = \frac{v^2}{c^2} F + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt}}$$

Dalla quale si ricava:

$$\boldsymbol{F = \frac{m_0 a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}} \qquad (16.4)$$

Dalla (16.4) si ottiene l'espressione dell'accelerazione valida per percorsi rettilinei in funzione della velocità:

$$\boldsymbol{a = \frac{F}{m_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (16.5)$$

È semplice verificare che la (16.5) si riduce alla forma scalare della (1.1) nel caso in cui $\boldsymbol{v \ll c}$.

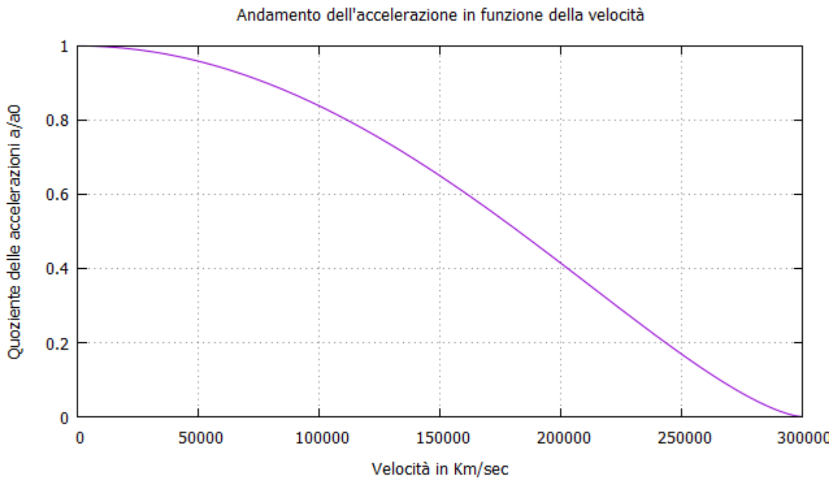

Fig. 25

La (16.5) mostra anche che, mantenendo costante la forza, all'aumentare della velocità l'accelerazione si riduce progressivamente, tendendo a zero per velocità prossime a quella della luce (vedi figura 25).

Questo risultato si trova in perfetto accordo con le osservazioni sperimentali effettuate per mezzo degli acceleratori di particelle subatomiche.

È interessante notare che la relazione (16.5) è anche ricavabile dall'equazione differenziale (6.3) che abbiamo usato nel sesto capitolo come espressione intermedia per il calcolo dell'energia cinetica:

$$\boldsymbol{Fds} = \frac{\boldsymbol{m_0 v}}{\left(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}\right)^{\frac{3}{2}}} \boldsymbol{dv} \qquad (6.3)$$

Infatti, sostituendo nella (6.3) il prodotto della velocità e del differenziale del tempo $\boldsymbol{vdt}$ al posto dello spostamento infinitesimale $\boldsymbol{ds}$**,** e il prodotto dell'accelerazione e del differenziale del tempo $\boldsymbol{adt}$ al posto del valore infinitesimale della velocità $\boldsymbol{dv}$, dopo aver semplificato e risolto rispetto all'accelerazione $\boldsymbol{a}$ si ottiene la (16.5).

Caso 2. Calcolo vettoriale.

Nel caso in cui il percorso del corpo materiale non procede nella stessa direzione della forza, la relazione (5.1) del lavoro elementare deve essere scritta nel seguente modo:

$$\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{c^2 dm} \qquad (16.6)$$

Dove $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ rappresenta il prodotto scalare dei vettori della forza e del percorso infinitesimale.

Dalla (16.6) si ottiene:

$$\frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{c^2}} \qquad (16.7)$$

Ora viene inserita la relazione (16.7) e la formula della massa relativistica $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m_0}/\sqrt{\boldsymbol{1} - \boldsymbol{v^2}/\boldsymbol{c^2}}$ nella (16.1) e si semplifica:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{c^2}}\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{\boldsymbol{m_0}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}} \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{dt}} \qquad (16.8)$$

Nel seguente calcolo vettoriale utilizzeremo per tutti i vettori, la componente parallela (componente longitudinale) e la componente perpendicolare (componente trasversale) alla velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_T} \end{pmatrix}; \qquad \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_L} \\ \boldsymbol{a_T} \end{pmatrix}; \qquad \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Dall'equazione (16.8) si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_T} \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{c^2}}\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \frac{\boldsymbol{m_0}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_L} \\ \boldsymbol{a_T} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_T} \end{pmatrix} - \frac{\boldsymbol{F_L v}}{\boldsymbol{c^2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{m_0}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_L} \\ \boldsymbol{a_T} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

Poiché $\boldsymbol{F_L} \,||\, \boldsymbol{v}$ segue:

$$\begin{pmatrix} F_L \\ F_T \end{pmatrix} - \frac{v^2}{c^2}\begin{pmatrix} F_L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} a_L \\ a_T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (1-\frac{v^2}{c^2})F_L \\ F_T \end{pmatrix} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} a_L \\ a_T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Da questa relazione vettoriale si ottiene per la componente longitudinale e per quella trasversale dell'accelerazione:

$$a_L = \frac{F_L}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad a_T = \frac{F_T}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (16.9)$$

La figura 26 mostra le curve delle componenti del vettore longitudinale e trasversale dell'accelerazione relativistica in funzione della velocità. Queste relazioni concordano anche (per usare le parole di Max Born) con quelle derivate dal "formalismo matematico della teoria della relatività".

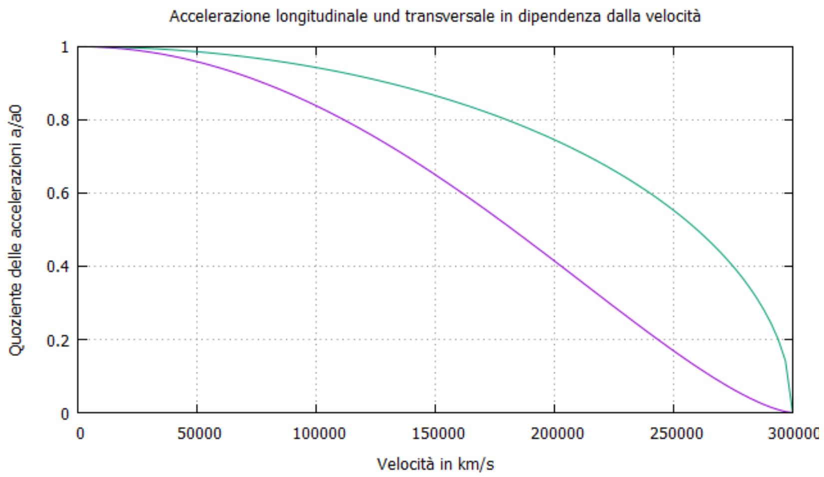

Fig. 26

La definizione del secondo principio della dinamica nella sua forma generale, ci consente di ricavare l'espressione dell'accelerazione in funzione della velocità. L'andamento delle curve illustrate in figura mostra che, per velocità prossime a quella della luce, l'accelerazione tende ad annullarsi, così com'è confermato dalle osservazioni sperimentali.