3 Dimostrazioni di $\mathrm{E} = \mathrm{mc}^2$ con la fisica classica

Riguardo a $E = mc^2$ Max Born scrive nella sua opera „Die Relativitätstheorie Einsteins“ (quinta edizione, Springer-Verlag, Pag. 244):

> “*L'equazione di Einstein E = mc², che attesta la proporzionalità fra energia e massa inerziale, è stata spesso definita il risultato più importante della relatività. Qui vogliamo presentare un'altra semplice dimostrazione di questa equazione che proviene dallo stesso Einstein e non fa uso del formalismo matematico della teoria della relatività* [sottolineato dall’autore]. *Questa dimostrazione si avvale dell’esistenza della pressione di radiazione. Che un'onda di luce riflessa su un corpo assorbente eserciti una pressione su di esso, risulta delle equazioni di campo di Maxwell con l’ausilio di un teorema derivato da Poynting (1884). Secondo questo teorema, risulta che la quantità di moto esercitata sulla superficie assorbente da un breve lampo o impulso di luce, avente energia E, è uguale a E / c. [...]*" [tradotto dal tedesco dall’autore].

La dimostrazione che segue dopo questo citato dimostra che, contrariamente alla convinzione generale, il principio di equivalenza energia-massa non è un risultato esclusivo della teoria della relatività. Infatti, la derivazione dell'equazione $\boldsymbol{E = mc^2}$ citata da Max Born si basa su un teorema del 1884. A quel tempo esisteva solo la fisica classica. La teoria della relatività e la meccanica quantistica sono state sviluppate in seguito.

Qui di seguito voglio ora riportare una dimostrazione del principio di equivalenza energia-massa analoga a quella citata qui sopra e basata sullo stesso fenomeno della cosiddetta “*pressione di radiazione*”.

Dimostrazione di E = mc² basata sulla “pressione di radiazione”.

L’esperimento ideale utilizzato, invece dell’effetto della radiazione emessa in un tubo, come descritto da Max Born, si avvale dell’osservazione dei fenomeni d’emissione e assorbimento della radiazione elettromagnetica fra due corpi materiali.

Si consideri un sistema fisico costituito da due corpi materiali K1 e K2 aventi masse $\boldsymbol{m}$ uguali e che inizialmente si trovino in quiete a una distanza $\boldsymbol{l}$ l’uno dall’altro.

Si presuppone che i corpi non scambino né energia né materia con l’ambiente esterno. Inoltre si assume che i corpi non siano soggetti a forze esterne.

A causa di queste ipotesi, sono validi i seguenti presupposti per qualsiasi modifica dello stato interno del sistema:

1. **La massa del sistema resta invariata**
2. **Il centro di massa del sistema permane in quiete**

Date le masse uguali, il baricentro $\boldsymbol{B}$ del sistema si troverà esattamente al centro fra i corpi, alla distanza $\boldsymbol{l/2}$ da entrambi, come illustrato in figura 1.

K1 Fig. 1 K2 (vedi l'animazione)

Si supponga che a un certo istante il corpo K1 a sinistra emetta un'intensa radiazione luminosa in direzione dell'altro corpo.

A causa dell'emissione della radiazione luminosa il corpo emettitore riceve un rinculo e in seguito si muove con una velocità $\boldsymbol{v}$ in direzione contraria a quella della radiazione.

Si assume che dopo il tempo $\boldsymbol{\Delta t}$ successivo all'emissione, il fascio luminoso abbia raggiunto il corpo K2 e da esso venga assorbito. Nello stesso lasso di tempo, il corpo K1 avrà percorso la distanza $\boldsymbol{\Delta l}$. Pertanto per l'intervallo di tempo trascorso fra emissione e assorbimento è valida la seguente relazione (c = velocità della luce):

$$\boldsymbol{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{v}}$$

Da cui segue:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{c} \qquad (3.1)$$

La figura 2 illustra la situazione del sistema nel momento in cui il fascio di luce viene assorbito dal corpo K2.

Poiché, secondo l'ipotesi, nessuna forza esterna agisce sul sistema, nel frattempo la posizione del corpo K2 non è cambiata.

Il corpo K1 a sinistra si è però allontanato durante l'intervallo di tempo $\boldsymbol{\Delta t}$ ed ora si trova a una distanza $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{\Delta l}$ dal corpo K2.

Da un'osservazione superficiale si potrebbe dedurre che si sia spostato anche il centro di gravità $\boldsymbol{B}$ del sistema. Tuttavia, questo non è possibile perché, secondo i presupposti, nessuna forza esterna agisce sul sistema.

Da ciò si può concludere che a causa dell'emissione del fascio luminoso, la massa del corpo K1 a sinistra, trovandosi questo a una distanza maggiore dal baricentro, deve essere diminuita di una certa entità $\boldsymbol{\Delta m}$ da calcolare.

D'altra parte, poiché la massa totale del sistema rimane invariata, la massa del corpo K2 a destra deve essere necessariamente aumentata della stessa quantità $\boldsymbol{\Delta m}$.

Ne consegue che dopo l'assorbimento del fascio luminoso, la massa del corpo K2 è $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\Delta m}$ mentre la massa del corpo K1 è diventata $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m}$.

$\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m}$ Fig. 2 $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\Delta m}$

Quanto segue si applica alla posizione del baricentro tra due masse come in Fig. 2:

$$(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m})(\boldsymbol{\Delta l} + \boldsymbol{l}/\boldsymbol{2}) = (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\Delta m})\,\boldsymbol{l}/\boldsymbol{2} \quad \Rightarrow$$

$$m\Delta l - \Delta m\Delta l + m\,l/2 - \Delta m\,l/2 = m\,l/2 + \Delta m\,l/2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(m - \Delta m)\Delta l}{l} = \Delta m \qquad (3.2)$$

Con la relazione (3.2) abbiamo ora a disposizione la seconda equazione necessaria per fare la dimostrazione.

La terza equazione richiesta per derivare il principio di equivalenza è fornita dal teorema di Poynting del 1884, menzionato all'inizio di questo capitolo.

Da questo teorema segue che la quantità di moto $\boldsymbol{p}$ di un fascio luminoso di energia $\boldsymbol{E}$ è: $\boldsymbol{p = E/c}$.

La legge di conservazione della quantità di moto applicata al processo di emissione del fascio luminoso richiede che l'impulso ricevuto dal corpo K1 a sinistra sia uguale alla quantità di moto del fascio luminoso:

$$(m - \Delta m)v = \frac{E}{c} \qquad (3.3)$$

Usando la relazione (3.1) nell'equazione (3.3) si ottiene:

$$(m - \Delta m)\frac{\Delta l}{l}c = \frac{E}{c} \quad \Rightarrow \quad (m - \Delta m)\frac{\Delta l}{l} = \frac{E}{c^2} \qquad (3.4)$$

E tenendo conto della relazione (3.2) otteniamo quindi:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}$$

Da cui si conclude che:

- L’emissione di una radiazione di energia $\boldsymbol{E}$ da parte di un corpo materiale causa una diminuzione della massa del corpo stesso pari all’energia della radiazione divisa per il quadrato della velocità della luce.
- L’assorbimento di una radiazione di energia $\boldsymbol{E}$ da parte di un corpo materiale causa un aumento della massa del corpo stesso pari all’energia della radiazione divisa per il quadrato della velocità della luce.

Dimostrazione di $E = mc^2$ basata sull’effetto Doppler della radiazione.

Un'altra dimostrazione non relativistica del principio di equivalenza di energia e massa si basa sull'effetto Doppler della radiazione elettromagnetica, come già menzionato nell'introduzione.

L'effetto Doppler è trattato nell’elettrodinamica "classica" e non rappresenta un effetto relativistico per basse velocità della sorgente luminosa emittente.

Per introdurre la dimostrazione, è necessario premettere alcune proprietà della radiazione elettromagnetica.

L'energia di un quanto di luce, detto anche fotone, è uguale al prodotto $\boldsymbol{hf}$, e la quantità di moto di un fotone è rappresentata dal quoziente $\boldsymbol{hf / c}$. Dove $\boldsymbol{f}$ è la frequenza assegnata al fotone, $\boldsymbol{h}$ è la costante di Planck e $\boldsymbol{c}$ è la velocità della luce nel vuoto.

Ne consegue che la relazione che intercorre tra l'energia $\boldsymbol{E_f}$ e la quantità di moto $\boldsymbol{p_f}$ di un fotone è la seguente: $\boldsymbol{E_f = p_f c}$.

Premesso questo, si consideri ora un corpo materiale di massa $\boldsymbol{m_1}$ che si muova rispetto a un osservatore con velocità costante $\boldsymbol{v_1}$ notevolmente inferiore a quella della luce.

Supponiamo che a un certo istante il corpo emetta due fotoni della stessa frequenza $\boldsymbol{f}$: un fotone nella direzione del movimento, l'altro nella direzione opposta, come mostrato in figura 3.

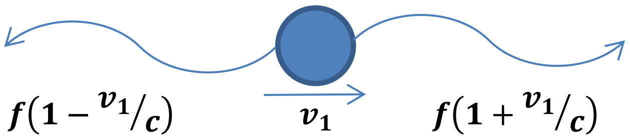

Fig. 3

L'energia irradiata dal corpo è quindi: $\boldsymbol{E = 2hf}$.

L'osservatore, tenendo conto dell'Effetto Doppler, misurerà una frequenza pari a $\boldsymbol{f(1 + {}^{v_1}/_{c})}$ per il fotone emesso in direzione del moto e a $\boldsymbol{f(1 - {}^{v_1}/_{c})}$ per quello emesso in direzione opposta.

Per il principio di conservazione, la quantità di moto del corpo prima dell'emissione deve essere pari alla somma delle quantità di moto del corpo e dei due fotoni dopo l'emissione, quindi dal punto di vista dell'osservatore risulterà[1]:

$$\boldsymbol{m_1 v_1 = m_2 v_2 + \frac{hf}{c}\left(1 + \frac{v_1}{c}\right) - \frac{hf}{c}\left(1 - \frac{v_1}{c}\right)} \quad (3.5)$$

[1] La dimostrazione è qui fatta con l'uso delle moderne relazioni $f' = f(1 + {}^{v}/_{c})$ e $f' = f(1 - {}^{v}/_{c})$ per l'effetto Doppler ottico. Invece di queste, possono essere utilizzate anche le relazioni dell'effetto Doppler-Fizeau del 1848. A quel tempo, Fizeau distingueva ancora tra il movimento della sorgente luminosa e del ricettore, in base all'effetto Doppler acustico, considerando valida l'espressione $f' = f/(1 - {}^{v}/_{c})$ per l'avvicinamento e $f' = f/(1 + {}^{v}/_{c})$ per l'allontanamento della fonte luminosa. Usando queste relazioni invece delle espressioni sopra menzionate, l'equazione (3.5) deve essere modificata come segue:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 + \frac{hf}{c\left(1 - \frac{v_1}{c}\right)} - \frac{hf}{c\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)}$$

Poiché questa equazione deriva dalla fisica classica, può essere utilizzata solo per $v_1 \ll c$. L'intervallo di validità deve quindi essere limitato solo a valori di v_1 per i quali risulti che il quoziente v_1^2/c^2 sia trascurabile. Ne segue:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = \frac{2hf v_1}{c^2\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}$$

Poiché in quest'ultima relazione v_1^2/c^2 può essere posto uguale a zero senza perdita di valore, essa si riduce alla relazione (3.6). Ciò dimostra che la derivazione del principio di equivalenza E-M può essere effettuata anche utilizzando le relazioni dell'effetto Doppler di Fizeau del 1848.

Che si semplifica nella seguente espressione:

$$\boldsymbol{m_1 v_1 - m_2 v_2 = 2\frac{hfv_1}{c^2}} \qquad (3.6)$$

Dove $\boldsymbol{m_2}$ e $\boldsymbol{v_2}$ sono la massa e la velocità del corpo dopo l'emissione.

Data la natura simmetrica dell'effetto (fotoni uguali emessi in direzioni opposte), dopo l'emissione non si verificherà alcun mutamento di velocità del corpo, quindi sarà: $\boldsymbol{v_1 = v_2}$.

La massa del corpo materiale, invece, non resterà costante, altrimenti col primo si annullerebbe anche il secondo membro della (3.6), cosa che potrebbe però accadere solo se, contrariamente ai presupposti su cui si basa l'esperimento ideale, la frequenza $\boldsymbol{f}$ o la velocità $\boldsymbol{v_1}$ fossero uguali a zero.

Perciò, sostituendo nella (3.6) $\boldsymbol{v_1}$ a $\boldsymbol{v_2}$ e ponendo $\boldsymbol{\Delta m}$ al posto di $\boldsymbol{m_1 - m_2}$ si ottiene:

$$\boldsymbol{\Delta m v_1 = 2\frac{hfv_1}{c^2}}$$

Dopo aver semplificato e tenuto presente che $\boldsymbol{2hf}$ è l'energia $\boldsymbol{E}$ irradiata dal corpo sotto forma dei due fotoni emessi, perveniamo alla formula che esprime l'equivalenza fra massa ed energia per il caso particolare della radiazione elettromagnetica:

$$\boldsymbol{\Delta m = \frac{E}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad E = \Delta m c^2} \qquad (3.7)$$

Vale a dire:

L'energia irradiata da un corpo materiale è pari alla perdita di massa, subita dal corpo in seguito all'emissione, moltiplicata per il quadrato della velocità della luce.

> Le dimostrazioni alternative di Einstein e del fisico Fritz Rohrlich si basano sull'interazione fra materia e radiazione, e sul principio di conservazione della quantità di moto. Esse confermano, senza far uso del "*formalismo matematico della teoria della relatività*", il principio di equivalenza fra energia e massa nel caso particolare dell'emissione elettromagnetica.