11 Contrazione delle lunghezze e dilatazione del tempo

Nel prossimo esperimento ideale vedremo come può essere dimostrata la contrazione delle lunghezze in funzione della velocità con l'aiuto del principio di conservazione dell'energia.

A tal proposito immaginiamo l'urto centrale di due elettroni che all'istante $\boldsymbol{t = 0}$ abbiano una distanza $2\boldsymbol{l}$ l'uno dall'altro e che prima della collisione si avvicinino con velocità $\boldsymbol{v}$ uguali, così come illustrato a sinistra di figura 15.

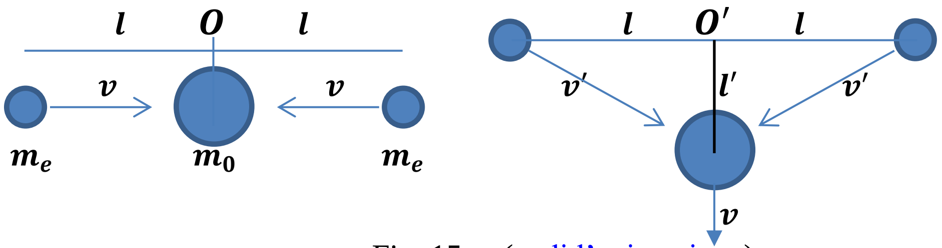

Fig. 15 (vedi l'animazione)

Si assume che in seguito all'urto si formi una nuova particella con massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ che si trovi nell'origine di un sistema di coordinate in quiete rispetto a un osservatore $\boldsymbol{O}$.

Poiché per l'osservatore $\boldsymbol{O}$ la distanza percorsa da una particella fino alla collisione è uguale a $\boldsymbol{l}$, se l'intervallo di tempo fino alla collisione è $\boldsymbol{t}$, allora risulterà: $\boldsymbol{l = vt}$.

Consideriamo ora lo stesso esperimento ideale dal punto di vista di un secondo osservatore $\boldsymbol{O'}$ in quiete in un sistema di riferimento che si muove alla stessa velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle, ma in direzione verticale verso l'alto.

Poiché questo moto in direzione Y è ortogonale alla direzione del movimento degli elettroni, gli osservatori $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ misurano in direzione X la stessa lunghezza $\boldsymbol{l}$, la stessa velocità $\boldsymbol{v}$ e quindi, fino alla collisione, anche lo stesso tempo $\boldsymbol{t}$.[1]

Durante questo lasso di tempo, l'osservatore $\boldsymbol{O'}$ si sposta in avanti fino alla distanza $\boldsymbol{l'}$, quindi nel sistema di coordinate $\boldsymbol{O'}$ la collisione avviene per lui sull'asse Y alla stessa distanza $\boldsymbol{l'}$ ma in direzione opposta al suo moto (vedi Figura 15 a destra).

Partiamo dal presupposto che all'istante $\boldsymbol{t = 0}$ le origini dei due sistemi di riferimento $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ coincidano e che per l'osservatore $\boldsymbol{O'}$ gli elettroni collidano sull'asse Y nel punto **T** in corrispondenza della coordinata $\boldsymbol{l'}$ come mostrato in Figura 16.

[1] In generale, ogni osservatore ha bisogno di trasformazioni per esaminare lo spazio e il tempo dalla prospettiva di un altro osservatore. Queste trasformazioni sono ancora sconosciute in questa fase della trattazione. Tuttavia, è certo che per velocità relativa $\boldsymbol{v = 0}$ gli osservatori misurino le stesse lunghezze e gli stessi tempi. Questo qui trattato è un caso bidimensionale. Per meglio orientarci, chiamo X l'asse su cui si muovono gli elettroni e Y l'asse su cui si muove l'osservatore $\boldsymbol{O'}$. In due dimensioni, ciascuno dei due osservatori necessita di una trasformazione per l'asse X e una trasformazione per l'asse Y al fine di calcolare le lunghezze dal punto di vista dell'altro osservatore. Entrambe le trasformazioni dipendono solo da una delle componenti $\boldsymbol{v_x}$ o $\boldsymbol{v_y}$ della velocità relativa $\boldsymbol{v}$ fra gli osservatori. Qui è necessaria solo la componente del movimento delle particelle nella direzione X per entrambi gli osservatori per calcolare $\boldsymbol{l, v}$ e $\boldsymbol{t}$. Per questo è sufficiente solo la trasformazione per l'asse X. La componente $\boldsymbol{v_x}$ della velocità relativa $\boldsymbol{v}$ tra gli osservatori nella direzione X è però zero. Questo è il motivo per cui la trasformazione per l'asse X fornisce gli stessi valori per lunghezze e tempi per entrambi gli osservatori.

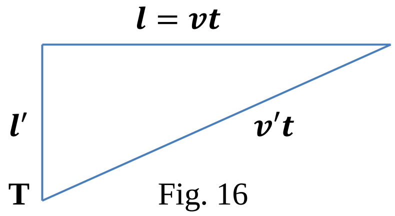

Fig. 16

Dalla figura 16, applicando il teorema di Pitagora si ottiene[2]:

$$v'^2 = v^2 + \frac{l'^2}{t^2} \qquad (11.1)$$

Nell'equazione (11.1) sono presenti due incognite: la lunghezza l' e la velocità v'.

Per il calcolo della lunghezza l' abbiamo quindi bisogno di una seconda relazione che esprima la velocità v', che si ha in direzione obliqua, in funzione della velocità v.

In un primo tempo calcoleremo l' per una velocità v molto inferiore a quella della luce.

Calcolo di l' per $v \ll c$

Come si può vedere in figura 17, la velocità v' degli elettroni misurata dall'osservatore O' per una velocità v notevolmente inferiore a **c** risulta dalla somma di due componenti vettoriali reciprocamente ortogonali e aventi lo stesso modulo. Applicando il teorema di Pitagora, risulta: $v' = \sqrt{2}v$.

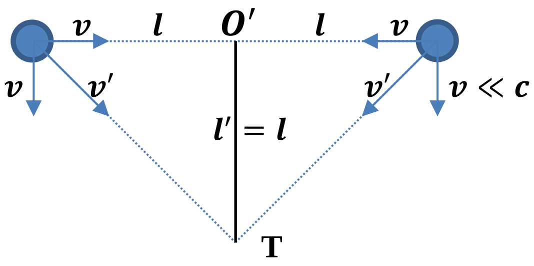

Fig. 17

Il vettore v' ha quindi un'inclinazione di 45°, perciò, dal punto di vista di O' per v << **c**, gli elettroni s'incontrano nel punto **T** alla coordinata:

$$l' = l$$

Dati questi presupposti, il vettore v' avendo il valore $\sqrt{2}v$, assumerebbe un valore non ammesso superiore a c per velocità superiori a circa il $\mathbf{70}\%$ della velocità della luce.

Quindi risultano chiari i limiti di questa considerazione classica.

---

[2] L'intervallo di tempo t misurato dagli osservatori sull'asse X fino alla collisione è necessariamente lo stesso di quello misurato dall'osservatore O' sull'ipotenusa del triangolo rettangolo in Fig.16. Se non fosse così l'osservatore O' invece di una, osserverebbe due collisioni in momenti diversi, la prima sul percorso inclinato e la seconda come mappatura della prima sull'asse X.

Calcolo di $\boldsymbol{l'}$ per una velocità qualunque

Per determinare la distanza $\boldsymbol{l'}$ per una velocità qualunque, abbiamo bisogno di un'altra equazione per l'incognita $\boldsymbol{v'}$ in funzione della velocità $\boldsymbol{v}$.

Va tenuto conto che il calcolo di $\boldsymbol{v'}$ debba essere fatto osservando le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

Questo requisito consente il calcolo relativistico della lunghezza $\boldsymbol{l'}$ così come segue:

Dal punto di vista di $\boldsymbol{O}$, per la legge di conservazione dell'energia, è verificabile quanto segue (vedi Figura 15 a sinistra):

$$\boldsymbol{m_0 c^2 = \frac{2 m_{0e} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (11.2)$$

Dal punto di vista di $\boldsymbol{O'}$, la particella formata dopo la collisione si muove verso il basso lungo l'asse Y con la velocità $\boldsymbol{v}$ (vedi a destra di Fig. 15). Per $\boldsymbol{O'}$ quindi risulta (vedi anche in Appendice A V):

$$\boldsymbol{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 m_{0e} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}} \qquad (11.3)$$

Sostituendo la relazione (11.2) nella (11.3) si ottiene:

$$\boldsymbol{\frac{2 m_{0e} c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2 m_{0e} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2} = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{1 - 2\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} = 1 - \frac{v'^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{v'^2 = 2v^2 - \frac{v^4}{c^2}} \qquad (11.4)$$

La (11.4) è la relazione cercata che esprime $\boldsymbol{v'}$ in funzione di $\boldsymbol{v}$.

Sostituendo il valore di $\boldsymbol{v'^2}$ calcolato dalla (11.4) nella (11.1) si ottiene:

$$\boldsymbol{\frac{l'^2}{t^2} = v^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \qquad (11.5)$$

Poiché $\boldsymbol{vt = l}$, la (11.5) può essere scritta nel modo seguente:

$$l'^2 = l^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Da qui segue:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (11.6)$$

La relazione (11.6) esprime, in accordo con la teoria della relatività, la contrazione della lunghezza nella direzione del movimento in dipendenza dalla velocità.

Dalla relazione (11.6) può essere derivata in modo semplice anche la dilatazione temporale.

Quanto segue si applica alla direzione verticale:

$$t' = \frac{l'}{v} \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} \quad \Rightarrow \quad t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (11.7)$$

La relazione (11.7) esprime, in accordo con la teoria della relatività, la dilatazione temporale dipendente dalla velocità nella direzione del movimento.

> L'applicazione della legge di conservazione dell'energia alla collisione di due elettroni da parte di due osservatori in moto relativo fra di loro ci consente di ricavare le relazioni relativistiche della contrazione delle lunghezze e della dilatazione dei tempi in funzione della velocità.