8 Composizione delle velocità di due elettroni in collisione

In questo capitolo viene descritto un esperimento mentale basato sulla collisione anelastica di due elettroni.

Due osservatori $\mathbf{O}_e$ e $\mathbf{O}_L$ in moto relativo fra di loro, esaminano il processo fisico indipendentemente l'uno dall'altro. Entrambi usano la legge di conservazione dell'energia per i loro calcoli. Quindi mettono a confronto i loro risultati usando la massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ della particella formata, che è invariante per entrambi.

Da due equazioni si ottiene quindi una singola relazione, che rappresenta la velocità relativa tra gli elettroni in funzione delle velocità dei singoli elettroni.

Con questo metodo deriveremo ora il teorema di composizione relativistica delle velocità nel caso speciale in cui queste ultime siano uguali, come segue.

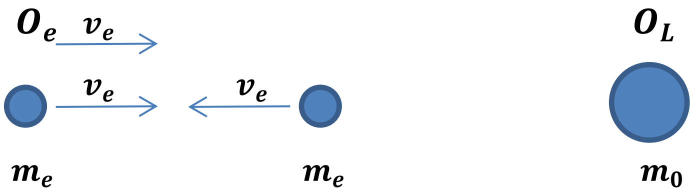

Fig. 9 (vedi l'animazione)

Si immagini l'urto centrale di un elettrone e un positrone che prima della collisione si avvicinino con velocità $\boldsymbol{v_e}$ uguali.[1] Si assume che la perdita di energia causata dall'interazione elettromagnetica tra gli elettroni sia trascurabile se paragonata all'elevata energia cinetica delle particelle collidenti.

S'immagini che in seguito all'urto si formi una particella con massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ che si trovi in quiete rispetto a un osservatore $\mathbf{O}_L$ (vedi Fig. 9).

Quest'ultimo, ammesso che conosca le velocità $\boldsymbol{v_e}$ degli elettroni collidenti, potrà calcolare la massa della particella formatasi, per mezzo della seguente espressione, che tiene conto della conservazione dell'energia prima e dopo l'urto:

$$\boldsymbol{m_e c^2 + m_e c^2 = m_0 c^2} \qquad (8.1)$$

Vale a dire: L'energia $\boldsymbol{m_0 c^2}$ della particella formatasi dopo l'urto sarà uguale alla somma delle energie delle particelle (in questo caso due elettroni) collidenti.

Dall'espressione (8.1), tenendo presente la (5.4) si ottiene:

$$\boldsymbol{m_0} = \frac{\boldsymbol{2m_{0e}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}} \qquad (8.2)$$

Dove $\boldsymbol{m_0}$ e $\boldsymbol{m_{0e}}$ sono, rispettivamente, le masse a riposo della particella che viene a formarsi e dell'elettrone.

[1] Un esperimento di questo tipo è stato effettivamente fatto e ripetuto innumerevoli volte, fra l'altro, in acceleratori di particelle chiamati anelli di accumulazione, già negli anni sessanta.

L'osservatore $\boldsymbol{O_L}$ è quindi in grado di misurare la massa a riposo della particella formatasi e conosce anche le velocità delle particelle collidenti, tuttavia non potrà asserire che la velocità relativa $\boldsymbol{v_{ee}}$ di un elettrone rispetto all'altro sia semplicemente data dalla somma delle loro velocità $\boldsymbol{v_e + v_e}$, così come risulta dalla trasformazione di Galilei per basse velocità, infatti ciò non sarebbe in accordo con i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

Per il calcolo della velocità relativa $\boldsymbol{v_{ee}}$ fra gli elettroni è necessario considerare lo stesso esperimento ideale dal punto di vista di un secondo osservatore $\boldsymbol{O_e}$ che si trovi in quiete con uno degli elettroni.

Prima dell'urto l'osservatore $\boldsymbol{O_e}$ misurerà un'energia totale $\boldsymbol{E_1}$ data dalla seguente espressione:

$$\boldsymbol{E_1 = m_{0e}c^2 + m_{ee}c^2 = m_{0e}c^2 + \frac{m_{0e}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}}} \qquad (8.3)$$

Vale a dire, l'energia misurata da $\boldsymbol{O_e}$ è pari alla somma dell'energia dell'elettrone con cui l'osservatore si trova in quiete e dell'energia dell'altro elettrone che $\boldsymbol{O_e}$ vede avvicinarsi con velocità $\boldsymbol{v_{ee}}$.

Dopo l'urto $\boldsymbol{O_e}$ si troverà ad avere la velocità $\boldsymbol{v_e}$ nei confronti della particella che si è formata e quindi ne misurerà l'energia $\boldsymbol{E_2}$ secondo la seguente espressione:

$$\boldsymbol{E_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}} \qquad (8.4)$$

Sostituendo nella (8.4) la massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ con l'espressione calcolata nella (8.2) e ponendo, in accordo con il principio di conservazione dell'energia, $\boldsymbol{E_1 = E_2}$ si ottiene:

$$\boldsymbol{m_{0e}c^2 + \frac{m_{0e}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}} = \frac{2m_{0e}c^2}{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} \qquad (8.5)$$

L'espressione (8.5) può essere semplificata dividendo tutti i termini per $\boldsymbol{m_{0e}c^2}$:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}} = \frac{2}{1 - \frac{v_e^2}{c^2}} - 1} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}{1 + \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

Da questa espressione, dopo semplici calcoli algebrici, si ottiene la seguente:

$$v_{ee} = \frac{2v_e}{1 + \frac{v_e^2}{c^2}} \qquad (8.6)$$

La relazione (8.6) rappresenta la velocità relativa fra due particelle in collisione nel caso di velocità identiche e quindi esprime la composizione relativistica di velocità uguali.

Allo stesso risultato si perviene se, invece di quello dell'energia, si fa uso del principio di conservazione della quantità di moto.

In questo caso, stabilendo l'uguaglianza delle quantità di moto misurate dall'osservatore $\boldsymbol{O_e}$ prima e dopo l'urto, si ottiene:

$$m_{ee}v_{ee} = \frac{m_0 v_e}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

E utilizzando le espressioni (5.4) e (8.2) risulta:

$$\frac{m_{0e}v_{ee}}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}} = \frac{2m_{0e}v_e}{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}$$

Quest'ultima equazione, risolta rispetto a $\boldsymbol{v_{ee}}$, ci dà quindi la relazione (8.6). (Per i dettagli vedi A III in Appendice).

A questo punto desidero porre l'accento sul dato di fatto che la (8.6) è stata ricavata tramite la semplice applicazione del principio di conservazione dell'energia e senza fare uso dei postulati della teoria della relatività speciale.

La relazione (8.6) mostra che a basse velocità (ad esempio nel caso di due treni), essendo trascurabile il termine $\frac{v_e^2}{c^2}$, la velocità relativa è effettivamente pari alla somma delle velocità (curva verde in figura 10), così come è intuitivo.

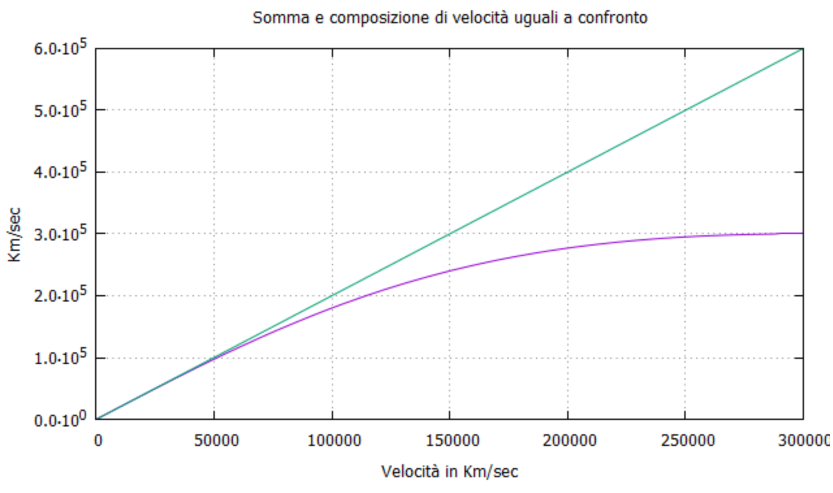

Fig. 10

Dall'espressione (8.6), tuttavia, si può trarre la seguente conclusione generale:

Velocità elevate non possono essere sommate algebricamente.

Per la composizione di velocità uguali si potrà quindi fare uso della (8.6) che, al contrario della composizione per somma, si trova in accordo con i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto (curva violetta).

È semplice mostrare che in base alla relazione (8.6) la velocità relativa $\boldsymbol{v_{ee}}$ fra due particelle può al massimo raggiungere la velocità della luce (questo avviene nel caso in cui le particelle incidenti siano fotoni e quindi con $\boldsymbol{v_e}$ uguale a $\boldsymbol{c}$) ma non può mai superarla.

Se si suppone che le velocità delle particelle collidenti siano diverse si può eseguire una dimostrazione analoga a quella appena fatta, anche se algebricamente meno semplice, come si vedrà nel decimo capitolo.

Vedremo che, supponendo che le velocità siano $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$, si perviene al seguente risultato …

$$\boldsymbol{v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}} \qquad (8.7)$$

… che per $\boldsymbol{v_1 = v_2}$ si riduce alla (8.6).

La relazione (8.7) risulta identica alla formula relativistica della composizione delle velocità.

Possiamo quindi concludere affermando che la relazione (8.6) conferma la validità dell'espressione relativistica sulla composizione delle velocità nel caso particolare di velocità uguali.

Il principio di conservazione dell'energia, applicato a un caso particolare di moto di collisione fra due elettroni, ci dà una prima conferma del teorema relativistico della composizione delle velocità.