10 Il teorema della composizione delle velocità

I metodi convenzionali per derivare il teorema di addizione delle velocità si basano sulle trasformazioni. Nel quinto capitolo, tuttavia, è stato affermato che nel corso di questa trattazione dobbiamo rinunciare all'aiuto di qualsiasi trasformazione, perché se da un lato la trasformazione di Galilei è applicabile solo a basse velocità, dall'altro una trasformazione per qualsiasi velocità non è stata ancora derivata. Per le dimostrazioni disponiamo quindi solo delle leggi di conservazione della massa, dell'energia e della quantità di moto.

Per comporre le velocità, distinguiamo tra due casi: caso 1. per velocità basse e caso 2. per qualunque velocità. Dal caso 1. dovrebbe essere chiaro che tipo di metodo viene utilizzato.

Partiamo dal presupposto che a seguito della collisione centrale di due particelle $\boldsymbol{T_1}$ di massa $\boldsymbol{m_1}$ e $\boldsymbol{T_2}$ di massa $\boldsymbol{m_2}$, un ricercatore $\boldsymbol{O}$ osservi la formazione di una nuova particella $\boldsymbol{T}$ di massa $\boldsymbol{m_0}$ che resti in quiete con lui. Un secondo osservatore $\boldsymbol{O_1}$ che si muove con velocità $\boldsymbol{v_1}$, si trovi in quiete con la particella $\boldsymbol{T_1}$.

Caso 1. Addizione per basse velocità

Immaginiamo un fisico che voglia derivare il teorema di addizione delle velocità nel contesto della meccanica classica senza però utilizzare la trasformazione di Galilei, che non conosce o della cui correttezza egli dubiti. Egli si riferisce all'esperimento ideale della Fig. 14 e utilizza solo le leggi di conservazione della massa e della quantità di moto della meccanica classica. Dal punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O}$ risulta:

$$\boldsymbol{m_0 = m_1 + m_2 \quad (a) \qquad e \qquad m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \quad (b)}$$

Se $\boldsymbol{v_{12}}$ è la velocità della particella $\boldsymbol{T_2}$ dal punto di vista dell'osservatore $\boldsymbol{O_1}$, per quest'ultimo risulta per la quantità di moto prima e dopo la collisione:

$$\boldsymbol{m_2 v_{12} = m_0 v_1} \qquad (\boldsymbol{c})$$

Utilizzando la relazione (a) nell'equazione (c) si ottiene:

$$\boldsymbol{m_2 v_{12} = m_1 v_1 + m_2 v_1} \qquad (\boldsymbol{d})$$

Dalla relazione (b) otteniamo: $\boldsymbol{m_1 v_1 = m_2 v_2}$ che inserita nell'equazione (d) ci dà la composizione delle velocità per la meccanica classica:

$$\boldsymbol{v_{12} = v_1 + v_2}$$

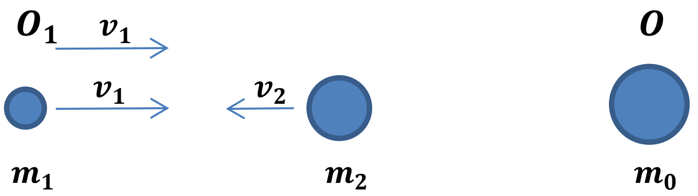

Fig. 14 (vedi l'animazione)

Ora mostreremo come, utilizzando un metodo analogo, possa essere derivato il teorema di addizione relativistica per qualsiasi velocità.

Caso 2. Addizione per qualsiasi velocità

Nel prossimo esperimento ideale applicheremo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto al caso più generale dell'urto di due particelle aventi masse e velocità diverse.

Come vedremo, i calcoli un po' più complessi, che nel caso di masse e velocità uguali, condurranno alla relazione (8.7).

Se $\boldsymbol{m_{01}}$, $\boldsymbol{m_{02}}$ e $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ sono le masse a riposo e, rispettivamente, le velocità di $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$, usando il principio di conservazione dell'energia prima e dopo la collisione, lo sperimentatore $\boldsymbol{O}$ osserverà per la massa a riposo $\boldsymbol{m_0}$ di $\boldsymbol{P}$ il valore dato dalla seguente espressione:

$$\boldsymbol{m_0 c^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2} \qquad \Rightarrow$$

O meglio, utilizzando la relazione (5.4):

$$\boldsymbol{m_0} = \frac{\boldsymbol{m_{01}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}} + \frac{\boldsymbol{m_{02}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}} \qquad (10.1)$$

D'altra parte, essendo nulla la velocità, e quindi la quantità di moto della particella $\boldsymbol{P}$ risultante dall'urto, per il principio di conservazione della quantità di moto prima e dopo l'urto, $\boldsymbol{m_{01}}$, $\boldsymbol{m_{02}}$, $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ dovranno essere legate dalla seguente relazione:

$$\frac{\boldsymbol{m_{01} v_1}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}} - \frac{\boldsymbol{m_{02} v_2}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}} = \boldsymbol{0} \qquad (10.2)$$

e quindi, usando $\boldsymbol{\beta_x}$ al posto di $\boldsymbol{v_x/c}$:

$$\frac{\boldsymbol{m_{01}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_1^2}}} = \frac{\boldsymbol{m_{02}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_2^2}}} \frac{\boldsymbol{\beta_2}}{\boldsymbol{\beta_1}} \qquad (10.3)$$

Sostituendo la (10.3) nella (10.1), dopo aver messo in evidenza il termine $\frac{\boldsymbol{m_{02}}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\beta_2^2}}}$ otteniamo:

$$\boldsymbol{m_0} = \frac{\boldsymbol{m_{02}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_2^2}}} \left(\boldsymbol{1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}}\right) \qquad (10.4)$$

La (10.4), a differenza della (10.1), ci dà il valore della massa a riposo della particella $\boldsymbol{P}$ formatasi dopo l'urto, in dipendenza della massa di una sola delle due particelle incidenti. Della (10.4) faremo uso più avanti per portare a termine la seguente dimostrazione.

Consideriamo ora un secondo osservatore $\boldsymbol{O_1}$ che si trovi in quiete con la particella $\boldsymbol{P_1}$.

Quest'ultimo potrà misurare la velocità relativa $\boldsymbol{v_{12}}$ fra $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$ applicando il principio di conservazione della quantità di moto prima e dopo l'urto delle particelle nel modo seguente:

Prima dell'urto, essendo l'osservatore $\boldsymbol{O_1}$ in quiete con $\boldsymbol{P_1}$, la quantità di moto da lui misurata sarà soltanto quella della particella $\boldsymbol{P_2}$, che $\boldsymbol{O_1}$ vede avvicinarsi con velocità pari a $\boldsymbol{v_{12}}$:

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{\boldsymbol{m_{02} v_{12}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_{12}^2}{c^2}}}}$$

Avvenuto l'urto, $\boldsymbol{O_1}$ si manterrà con velocità costante $\boldsymbol{v_1}$ nei confronti della particella $\boldsymbol{P}$, la stessa velocità di $\boldsymbol{P_1}$ prima della collisione. Dopo l'urto, quindi, la quantità di moto che $\boldsymbol{O_1}$ misurerà sarà quella della sola $\boldsymbol{P}$ con massa $\boldsymbol{m_0}$:

$$\boldsymbol{p_2} = \frac{\boldsymbol{m_0 v_1}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}}$$

Per il principio di conservazione, la quantità di moto prima e dopo la collisione deve rimanere invariata. Vale a dire $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_2}$ e quindi segue:

$$\frac{\boldsymbol{m_{02} v_{12}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_{12}^2}{c^2}}}} = \frac{\boldsymbol{m_0 v_1}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}} \qquad \Rightarrow$$

Per seguire meglio i calcoli seguenti, $\boldsymbol{v_x / c}$ viene sostituito da $\boldsymbol{\beta_x}$.

Così si ottiene:

$$\frac{\boldsymbol{m_{02} \beta_{12}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_{12}^2}}} = \frac{\boldsymbol{m_0 \beta_1}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_1^2}}} \qquad (10.5)$$

(A partire da questo punto si può anche effettuare una dimostrazione basata sul principio di conservazione dell'energia, invece che su quello della quantità di moto. Vedi A IV in Appendice).

Sostituito ora il valore di $\boldsymbol{m_0}$ dalla (10.4) nella (10.5) otteniamo:

$$\frac{\boldsymbol{m_{02}\ \beta_{12}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_{12}^2}}} = \frac{\boldsymbol{m_{02}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_1^2}}\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_2^2}}} \boldsymbol{\beta_1} \left(\boldsymbol{1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{\beta_{12}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_{12}^2}}} = \frac{\boldsymbol{\beta_1 + \beta_2}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_1^2}}\sqrt{\boldsymbol{1 - \beta_2^2}}} \qquad \Rightarrow$$

Allo scopo di eliminare le radici vengono ora elevati entrambi i termini dell'equazione al quadrato:

$$\frac{\boldsymbol{\beta}_{12}^2}{1-\boldsymbol{\beta}_{12}^2} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1^2 + 2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_2^2}{1-\boldsymbol{\beta}_1^2-\boldsymbol{\beta}_2^2+\boldsymbol{\beta}_1^2\boldsymbol{\beta}_2^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta}_{12}^2 - \boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1^2 - \boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_2^2 + \boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1^2\boldsymbol{\beta}_2^2 =$$
$$= \boldsymbol{\beta}_1^2 + 2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_2^2 - \boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1^2 - 2\boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_2^2$$

Eliminiamo ora i termini $\boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1^2$ e $\boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_2^2$ che compaiono con lo stesso segno nei membri di destra e di sinistra dell'equazione. Inoltre trasferiamo il termine $2\boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2$ dal membro di destra a quello di sinistra.

Otteniamo:

$$\boldsymbol{\beta}_{12}^2 + 2\boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_{12}^2\boldsymbol{\beta}_1^2\boldsymbol{\beta}_2^2 = \boldsymbol{\beta}_1^2 + 2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta}_{12}^2\left(1 + 2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_1^2\boldsymbol{\beta}_2^2\right) = \boldsymbol{\beta}_1^2 + 2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_2^2$$

Tenendo presente che i membri a sinistra e destra dell'equazione sono quadrati di binomi …

$$\boldsymbol{\beta}_{12}^2(1+\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2)^2 = (\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)^2 \quad \Rightarrow$$

… traendone la radice quadrata si ottiene:

$$\boldsymbol{\beta}_{12} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{1+\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2}$$

E quindi, risostituendo $\boldsymbol{\beta}_x$ con $\boldsymbol{v}_x/\boldsymbol{c}$, si perviene alla relazione relativistica della composizione delle velocità:

$$\boldsymbol{v}_{12} = \frac{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2}{1+\frac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{c}^2}} \qquad (10.6)$$

La relazione (10.6) è in accordo col teorema della composizione delle velocità secondo la teoria della relatività di Einstein.

Lo stesso risultato si ottiene naturalmente anche utilizzando una dimostra-zione basata sul principio di conservazione dell'energia (in Appendice A IV).

A questo punto desidero porre l'accento sul dato di fatto che il teorema della composizione delle velocità è stato dimostrato tramite la semplice applicazione dei principi di conservazione e senza l'uso del postulato della costanza della velocità della luce.

L'applicazione dei principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto all'osservazione sperimentale dell'urto centrale di due particelle, consente di dimostrare il teorema relativistico della composizione delle velocità nel caso più generale.