6 Die Berechnung der kinetischen und der gesamten Energie

Mit Hilfe der Definition der Arbeit in der Mechanik kann die kinetische Energie berechnet werden, die einem ungebundenen starren Körper durch eine auf ihn wirkende Kraft zugeführt wird.

Im Rahmen der klassischen Mechanik, geht man gewöhnlich wie folgt vor:

Angenommen die Masse ist konstant, so lässt sich die Differentialgleichung (1.2) verwenden.

Wie im ersten Kapitel gesehen, ist (1.2) eine direkte Folge der Gleichung (1.1):

$$\vec{F} = m_0\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m_0\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.1)$$

Demzufolge gilt für die Zuführung der kinetischen Energie durch das infinitesimale Element der Arbeit $\boldsymbol{Fds}$[1]:

$$dE_k = Fds = m_0 v dv \qquad (1.2)$$

Wenn die Differentialgleichung (1.2) für eine Anfangsgeschwindigkeit gleich Null integriert wird, ergibt sich der Ausdruck der kinetischen Energie:

$$E_k = m_0\int_0^v v\,dv = \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad (v \ll c) \qquad (6.1)$$

Da sie aus der Gleichung (1.1) abgeleitet wurde, beschreibt die Relation (6.1) die kinetische Energie einer Punktmasse $\boldsymbol{m_0}$ nur für Geschwindigkeiten, die erheblich niedriger als die des Lichtes sind, bei denen die Trägheit des Körpers so gut wie unverändert bleibt.

Im allgemeineren Fall, d.h. auch für Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit, ist es stattdessen erforderlich, folgende Relation zu verwenden...

$$dE_k = Fds = v^2dm + mvdv \qquad (1.5)$$

… in Übereinstimmung mit dem, was im ersten Kapitel dargelegt wurde[2].

Wenn die zwei im fünften Kapitel berücksichtigten Beziehungen für die Masse angewendet werden, ...

$$Fds = dE_k = c^2dm \qquad (5.1)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (5.4)$$

[1] Wie bereits erwähnt, wird auch hier angenommen, dass das infinitesimale Wegstreckenelement ds in die gleiche Richtung der Kraft F verläuft.

[2] Es ist zu berücksichtigen, dass an dieser Stelle, so wie auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit, immer ungebundene starre Körper betrachtet werden, die keine potentielle Energie besitzen. Die hier betrachteten Körper können deshalb den subatomaren Teilchen angeglichen werden. Es ist deswegen offenkundig, dass die infinitesimale Arbeit in der Differentialgleichung (1.5) ganz in die kinetische Energie der Punktmasse übergeht.

… dann lässt sich feststellen, dass per Substitution die von der Geschwindigkeit abhängige Masse $\boldsymbol{m}$ aus der Differentialgleichung (1.5) eliminiert werden kann.

Damit ergibt sich die erforderliche Beziehung, um die Differentialgleichung (1.5) zu lösen.

Aus (5.1) folgt:

$$\boldsymbol{dm = \frac{dE_k}{c^2}} \qquad (6.2)$$

Nach der Substitution von (5.4) und (6.2) in (1.5) ergibt sich folgende Relation zwischen zugeführter mechanischer Energie und Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{dE_k = v^2 \frac{dE_k}{c^2} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v dv} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{(1 - \frac{v^2}{c^2}) dE_k = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{dE_k = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv} \qquad (6.3)$$

Wenn die Gleichungen (1.2) und (6.3) miteinander verglichen werden, lässt sich feststellen, dass in beiden Relationen das Differenzial der kinetischen Energie $\boldsymbol{dE_k}$ nur in Abhängigkeit von der invarianten Masse $\boldsymbol{m_0}$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ angegeben wird.

Allein die Relation (6.3) jedoch stellt den allgemein gültigen Ausdruck zur Berechnung der kinetischen Energie bei beliebigen Geschwindigkeiten dar.

Es ist leicht zu zeigen, dass sich (6.3) für $\boldsymbol{v << c}$ auf (1.2) reduzieren lässt.

So wie die Gleichung (1.2) durch Integration die kinetische Energie einer konstanten Punktmasse $\boldsymbol{m_0}$ bei niedrigen Geschwindigkeiten liefert, führt die Integration der Differentialgleichung (6.3) zur Berechnung der kinetischen Energie für die allgemeine Anwendung bei beliebigen Geschwindigkeiten.

Zur Berechnung der kinetischen Energie wird analog zu (1.2) die Differentialgleichung (6.3) zwischen den Integrationsgrenzen $\boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{v}$ integriert:

$$\boldsymbol{E_k = m_0 \int_0^v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} v dv} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_k = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \int_0^v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_k = -\frac{1}{2}m_0c^2\left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^v} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2} \qquad (6.4)$$

Die Beziehung (6.4) stellt den Ausdruck der kinetischen Energie eines Körpers in Abhängigkeit von seiner Masse und Geschwindigkeit dar.

Sie stimmt mit der relativistischen Formel der kinetischen Energie überein.

Mittels der Reihenentwicklung von Taylor und auch durch folgendes algebraisches Verfahren kann gezeigt werden, dass sich die Relation (6.4) für $\boldsymbol{v << c}$ auf die Gleichung (6.1) reduziert:

Für Geschwindigkeiten, die erheblich niedriger als die des Lichtes sind, ist der Quotient $\boldsymbol{v^4/4c^4}$ im Vergleich zum Term $\boldsymbol{v^2/c^2}$ vernachlässigbar. Deswegen kann dieser Quotient zum Radikand der Gleichung (6.4) ohne Wertveränderung addiert werden:

$$\boldsymbol{E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^4}{4c^4}}}-m_0c^2} \qquad \Rightarrow$$

Da der Nenner nun die Wurzel des Quadrats eines Binoms ist, gilt:

$$\boldsymbol{E_k = \frac{m_0c^2}{1-\frac{v^2}{2c^2}}-m_0c^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_k = \frac{\cancel{m_0c^2}-\cancel{m_0c^2}+\frac{1}{2}m_0v^2}{1-\frac{v^2}{2c^2}}}$$

Diese Gleichung reduziert sich dann auf (6.1) für $\boldsymbol{v << c}$.

In Abbildung 6 werden die Verläufe der kinetischen Energie aus den Gleichungen (6.1) (grüne Kurve) und (6.4) (violette Kurve) verglichen.

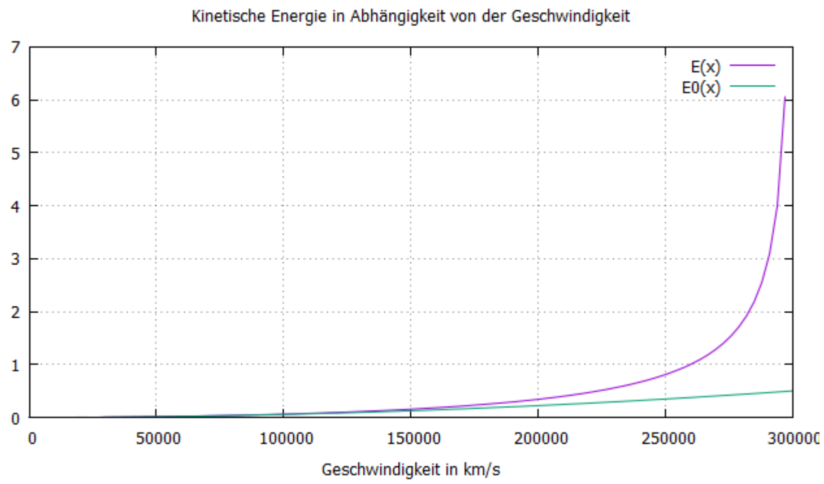

Abb. 6

Man kann feststellen, dass für niedrige Geschwindigkeiten die zwei Kurven tatsächlich übereinstimmen.

Die Kurven weichen aber immer mehr voneinander ab, wenn sich die Geschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit nähern.

Unter Berücksichtigung der Relation (5.4), kann die Formel (6.4) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_k + m_0c^2} \qquad (6.5)$$

Durch die Beziehung (6.5) kommen wir zum folgenden wichtigen Ergebnis:

Da die rechte Seite der Formel (6.5) gleich der Summe aus kinetischer und innerer Energie ist, lässt sich daraus schließen, dass $\boldsymbol{mc^2}$ bzw. $\boldsymbol{m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}}$ die gesamte Energie der Punktmasse $\boldsymbol{m_0}$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit darstellt.

Dies bestätigt das, was im vorhergehenden Abschnitt durch die Gleichung (5.6) zwar vorweggenommen, aber noch nicht bewiesen wurde.

Die in den Kapiteln 5 und 6 abgeleiteten Relationen der Arbeit und der Masse in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ermöglichen durch Substitution, die geschwindigkeitsabhängige Masse aus der Differentialgleichung der Arbeit zu eliminieren. Die darauffolgende Integration liefert dann als Endergebnis den Ausdruck der kinetischen und, gleichzeitig, der gesamten Energie eines Massepunkts in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit. Auch diese Gleichungen stimmen mit den relativistischen Formeln überein.