12 Raumkoordinaten- und Zeit-Transformation

Aus dem Beweis der Längenkontraktion (siehe Kapitel 11) lässt sich die Transformation für Raum und Zeit alternativ herleiten, ohne das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für beliebige Relativgeschwindigkeiten zwischen Lichtquelle und Empfänger vorauszusetzen.

Wir betrachten zwei eindimensionale Bezugssysteme relativ zueinander in Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Zwei Beobachter $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{O'}$ ruhen jeweils an den Koordinatenursprüngen $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{O'}$ der beiden Bezugssysteme und messen die Zeit $\boldsymbol{t}$ bzw. $\boldsymbol{t'}$. Die Koordinatenursprünge der beiden Bezugssysteme fallen zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ für $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{t' = 0}$ für $\boldsymbol{O'}$ zusammen.

Wir lassen gelten, so wie im Kapitel 9 diskutiert wurde, dass für spätere Zeitpunkte die Zeitmessungen $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{t'}$ verschieden sein können, d.h. wir nehmen nicht a priori an, dass $\boldsymbol{t = t'}$ ist, auch nicht für $\boldsymbol{v \ll c}$.

Um die Beziehungen zwischen den Bezugssystemen eindeutig darzustellen, werden wir uns bei den nächsten Diagrammen an folgenden Regeln halten:

- In jedem Diagramm kommt ein ruhender Beobachter vor. Ein zweiter Beobachter bewegt sich entlang der X-Achse mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$.
- Die Transformation wird aus der Sicht des ruhenden Beobachters betrachtet und somit wird seine Zeit verwendet. Der ruhende Beobachter wird in den Diagrammen **grau** hinterlegt.
- Das Bezugssystem des in Bewegung befindlichen Beobachters wird mit **gestrichelten Linien** dargestellt.
- Die Transformation betrifft immer die Berechnung der Raum-Koordinate des bewegten Beobachters in Abhängigkeit von der Raum- und Zeit-Koordinate des ruhenden Beobachters.

Transformation der Raumkoordinaten für $\boldsymbol{v \ll c}$

Ist die Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zwischen den Bezugssystemen erheblich niedriger als die Lichtgeschwindigkeit, dann werden von den beiden Beobachtern keine Längenkontraktionen in Bewegungsrichtung wahrgenommen. In Abbildung 18 ist der Beobachter $\boldsymbol{O}$ in Ruhe. $\boldsymbol{t}$ ist die von $\boldsymbol{O}$ gemessene Zeit.

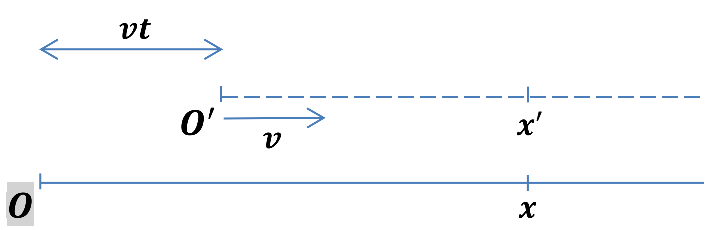

Abb. 18

Nach Abbildung 18 ergeben sich aus der Sicht von $\boldsymbol{O}$ die Beziehungen:

$$\boldsymbol{x = x' + vt} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x' = x - vt} \qquad (12.1)$$

Nach Abbildung 19 folgt dazu aus der Sicht von Beobachter $\boldsymbol{O'}$:

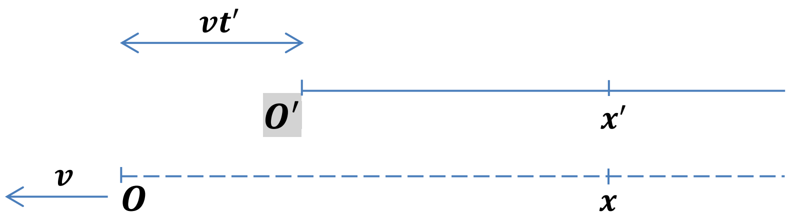

Abb. 19

Die zugehörigen Relationen sind:

$$\boldsymbol{x' = x - vt'} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = x' + vt'} \qquad (12.2)$$

Und ersetzt man hierin $\boldsymbol{x'}$ durch Relation (12.1) dann folgt:

$$\boldsymbol{x = x - vt + vt'} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = t'} \qquad (12.3)$$

Relation (12.3) zeigt für $\boldsymbol{v \ll c}$: Die Zeitkoordinate ist invariant.

Die Relationen (12.1) und (12.3) entsprechen der Galilei-Transformation und gelten im Rahmen der klassischen Mechanik für $\boldsymbol{v \ll c}$:

$$\boldsymbol{x' = x - vt} \quad (12.1); \qquad \boldsymbol{t = t'} \quad (12.3)$$

Transformation der Raumkoordinaten für beliebige $\boldsymbol{v}$

Betrachten wir jetzt die Situation aus der Sicht von Beobachter $\boldsymbol{O}$, diesmal für eine beliebige Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$:

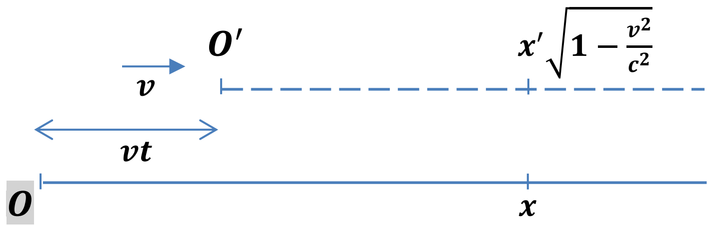

Abb. 20

Wie im Kapitel 11 bewiesen wurde, stellt Beobachter $\boldsymbol{O}$ eine Längenkontraktion der Strecke zwischen $\boldsymbol{O'}$ und $\boldsymbol{x'}$ fest, so dass für ihn der zu $\boldsymbol{x}$ entsprechende Punkt auf dem Bezugssystem $\boldsymbol{O'}$ bei der Koordinate $\boldsymbol{x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ lokalisiert ist**,** so wie in Abbildung 20 gezeigt wird.

Aus Abbildung 20 lässt sich entnehmen, dass für Beobachter $\boldsymbol{O}$ gilt:

$$\boldsymbol{x = x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + vt} \qquad \Rightarrow$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.4)$$

t in Gl. (12.4) ist die Zeit aus der Sicht von O.

Relation (12.4) stellt den Wert der Raum-Koordinate x' im Bezugssystem des Beobachters O' dar, in Abhängigkeit von der Raum- und Zeit-Koordinate (x, t) des Bezugssystems von O.

Betrachten wir jetzt die Situation aus der Sicht von Beobachter O':

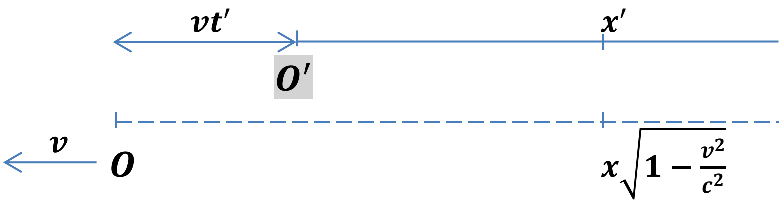

Abb. 21

Beobachter O' stellt eine Längenkontraktion der Strecke zwischen O und x fest, so dass für ihn der entsprechende Punkt von x' auf dem Bezugssystem O bei der Koordinate $x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zu finden ist**,** wie es Abbildung 21 zeigt.

Aus Abbildung 21 lässt sich ferner entnehmen, dass für Beobachter O' gilt:

$$x' + vt' = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.5)$$

Dabei ist zu bemerken, dass t' die Zeit aus der Sicht von O' darstellt**.** Sie ist von der Zeit t des Beobachters O allgemein verschieden, so wie im Kapitel 9 bereits diskutiert wurde.

Die Relationen (12.4) und (12.5) stellen die räumlichen Koordinaten-Transformationen für beliebige Geschwindigkeiten dar, aus der Sicht zweier Beobachter in relativer Bewegung zueinander.

<u>Transformation der zeitlichen Koordinate:</u>

Die Transformation für die zeitliche Koordinate lässt sich aus den Relationen (12.4) und (12.5) ableiten.

Aus Relation (12.5) ergibt sich:

$$x' = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt' \qquad (12.6)$$

Relation (12.4) gleichgesetzt mit Relation (12.6) ergibt:

$$\frac{\boldsymbol{x-vt}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \boldsymbol{x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-vt'} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x-vt = x\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-vt'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{-vt = -x\frac{v^2}{c^2}-vt'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{t' = \frac{t-\frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (12.7)$$

Mit einem analogen Verfahren lässt sich für $\boldsymbol{t}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{t'}$ und $\boldsymbol{x'}$ folgende Relation herleiten:

$$\boldsymbol{t = \frac{t'+\frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (12.8)$$

Die Koordinatentransformationen nach (12.4) und (12.5) sowie (12.7) und (12.8) erscheinen in gleicher Form als Bestandteile der Lorentz-Transformation, welche in Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie den Übergang zwischen Inertialsystemen für beliebige Geschwindigkeiten beschreibt.

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, wie die Raum- und Zeit-Transformation für beliebige Relativgeschwindigkeiten der Beobachter alternativ aus dem Phänomen der relativistischen Längenkontraktion hergeleitet werden kann.