# 14 Die Lorentz-Transformation und ihre Anwendung

Mit den Koordinatentransformationen von Lorentz, die wir in Kapitel 12 auf der Grundlage des Energieerhaltungssatzes und ohne das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit abgeleitet haben, sind wir nun in der Lage, einige wichtige physikalische Anwendungen bei hohen Geschwindigkeiten zu lösen und deren Ergebnisse zu diskutieren.

Wir betrachten einen Beobachter $\boldsymbol{O}$, der sich im Ursprung eines eindimensionalen Inertialsystems befindet, das durch die Koordinate $\boldsymbol{x}$ gekennzeichnet ist. Ein zweiter Beobachter $\boldsymbol{O'}$ bewege sich entlang der X-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$.

Unter der Voraussetzung, dass für die Zeit $\boldsymbol{t = 0}$ die Positionen der Beobachter $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{O'}$ übereinstimmen, gelten folgende nach Lorentz genannte Transformationen:

$$\boldsymbol{x'} = \frac{\boldsymbol{x - vt}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.1) \qquad und \qquad \boldsymbol{t'} = \frac{\boldsymbol{t - \frac{xv}{c^2}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.2)$$

In (14.1) und (14.2) liefern $\boldsymbol{x'}$und $\boldsymbol{t'}$ die Messwerte für die Position und die Zeit eines Punktes **P** aus der Sicht des Beobachters $\boldsymbol{O'}$. Sie werden in Abhängigkeit von den Messwerten der Position $\boldsymbol{x}$ und der Zeit $\boldsymbol{t}$ ausgedrückt, die vom Beobachter $\boldsymbol{O}$ für den gleichen Punkt gemessen werden.

Löst man (14.1) und (14.2) nach $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{t}$ auf, so ergibt sich:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x' + vt'}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.3) \qquad und \qquad \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{t' + \frac{x'v}{c^2}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (14.4)$$

Analog gilt nun: In (14.3) und (14.4) ergeben $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{t}$ die Messwerte für die Position und die Zeit eines Punktes **P** aus der Sicht des Beobachters $O$. Sie werden in Abhängigkeit von der Position $x'$ und der Zeit $t'$ ausgedrückt, die von Beobachter $\boldsymbol{O'}$ für den gleichen Punkt gemessen werden.

Es ist wichtig zu bemerken, dass der Punkt **P** nicht in einem der beiden Bezugssysteme ruhen muss. Folglich, kann sowohl $\boldsymbol{x}$ als auch $\boldsymbol{x'}$ zeitabhängig sein. Da in dieser Abhandlung nur gleichförmige Bewegungen betrachtet werden, ziehen wir nur folgende zeitliche Abhängigkeiten von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x'}$ in Betracht:

$$\boldsymbol{x = x_0 + v_p t} \quad (14.5) \qquad und \quad \boldsymbol{x' = x'_0 + v'_p t'} \quad (14.6)$$

mit den Parametern:

$\boldsymbol{v_p}$ ist die Geschwindigkeit von **P** in $\boldsymbol{O}$.

$\boldsymbol{x_0}$ ist die Position zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ von **P** in $\boldsymbol{O}$.

$\boldsymbol{v'_p}$ ist die Geschwindigkeit von **P** in $\boldsymbol{O'}$.

$\boldsymbol{x'_0}$ ist die Position zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t' = 0}$ von **P** in $\boldsymbol{O'}$.

Aus (14.1) und (14.3) ergibt sich, dass wenn $\boldsymbol{x_0 = 0}$, dann auch $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ und umgekehrt.

Ferner gilt, wenn $\boldsymbol{v'_p = 0}$ ist, dann ist $\boldsymbol{v_p = v}$ und wenn $\boldsymbol{v_p = 0}$ ist, dann ist $\boldsymbol{v'_p = -v}$ und umgekehrt.

Zusammen gefasst gilt:

$$\boldsymbol{x_0 = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x'_0 = 0} \qquad (14.7)$$

$$\boldsymbol{v'_p = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_p = v} \qquad (14.8)$$

$$\boldsymbol{v_p = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v'_p = -v} \qquad (14.9)$$

## Es folgen Anwendungsbeispiele der Lorentz-Transformation

### 1) <u>Zeit eines Punktes, der in Bezugssystem $\boldsymbol{O}$ ruht - Keine absolute Zeit</u>

Ein Punkt P ruht im Bezugssystem $\boldsymbol{O}$ $\boldsymbol{(v_p = 0)}$ bei den Koordinaten $\boldsymbol{x = x_0}$ und $\boldsymbol{t = 0}$.

Wir erhalten aus Relation (14.2):

$$\boldsymbol{t' = \frac{-\frac{x_0 v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Für $\boldsymbol{x_0 > 0}$ und $\boldsymbol{v > 0}$ gilt: $\boldsymbol{t' < 0}$.

Also, während Beobachter $\boldsymbol{O}$ für den Punkt $\boldsymbol{x_0}$ die Zeit $\boldsymbol{t = 0}$ misst, sieht Beobachter $\boldsymbol{O'}$ für den gleichen Punkt eine Zeit, die bereits in der Vergangenheit liegt.

### 2) <u>Länge eines im Bezugssystem $\boldsymbol{O'}$ruhenden Stabs - Längenkontraktion</u>

Ein Stab ruht im Bezugssystem des Beobachters $\boldsymbol{O'}$ und hat die Länge $\boldsymbol{l'}$. Die Stabenden haben die Koordinaten $\boldsymbol{x_1 = 0}$ und $\boldsymbol{x_2 = l}$ zum Zeitpunkt des Beobachters $\boldsymbol{O}$ bei $\boldsymbol{t = 0}$.

Aus Relation (14.1) ergibt sich für die Stabenden in Bezugssystem $\boldsymbol{O'}$:

$$\boldsymbol{x'_1 = 0\ ;\ x'_2 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x'_2 - x'_1 = l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad \Rightarrow$$

Für die Stablänge in Bezugssystem $\boldsymbol{O}$ gilt:

$$\boldsymbol{l = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

**Beobachter $\boldsymbol{O}$ nimmt eine Längenkontraktion für den im Bezugssystem des Beobachters $\boldsymbol{O'}$ ruhenden Stab wahr.**

## 3) Eigenzeit $t'$ des Beobachters $O'$ - Zeitdilatation

Für den Beobachters $\boldsymbol{O'}$ gilt in Bezugssystem $\boldsymbol{O}$: $\boldsymbol{x_0 = 0}$ und $\boldsymbol{v_p = v}$. Aus (14.5) folgt: $\boldsymbol{x = vt}$. In (14.2) eingesetzt ergibt sich:

$$\boldsymbol{t' = \frac{t - \frac{tv^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

**$\boldsymbol{O}$ nimmt gegenüber $\boldsymbol{O'}$ eine Zeitdilatation wahr.** Mit anderen Worten: Die im System $\boldsymbol{O'}$ vergehenden Zeitintervalle erscheinen im System $\boldsymbol{O}$ verlängert.

## 4) Photon startet im Bezugssystem $O'$ bei $t' = 0$, $x'_0 = 0$ - Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Mit $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ und $\boldsymbol{v'_p = c}$ folgt aus (14.6): $\boldsymbol{x' = ct'}$**.** Dies in (14.3) und (14.4) eingesetzt führt zu:

$$\boldsymbol{x = \frac{ct' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad und \qquad \boldsymbol{t = \frac{t' + \frac{ct'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Da für $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ auch $\boldsymbol{x_0 = 0}$ gilt, folgt aus (14.5) für die Geschwindigkeit des Photons in Bezugssystem $\boldsymbol{O}$:

$$\boldsymbol{v_p = \frac{x}{t}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_p = \frac{t'(c + v)}{t'(1 + \frac{v}{c})}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_p = c}$$

Trotz der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zwischen den Bezugssystemen messen beide Beobachter $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{O'}$ aus ihrer Perspektive, dass sich das Photon mit der gleichen Geschwindigkeit $\boldsymbol{c}$ bewegt.

## 5) Beweglicher Punkt im Bezugssystem $O'$ - Geschwindigkeitsaddition

Ein Punkt bewegt sich im Bezugssystem $\boldsymbol{O'}$ mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v'_p}$ und besitzt für $\boldsymbol{t' = 0}$ die Position $\boldsymbol{x' = 0}$. Aus (14.6) folgt: $\boldsymbol{x'_0 = 0}$ und konsequenterweise $\boldsymbol{x_0 = 0}$. Die Relationen (14.5) und (14.6) reduzieren sich auf:

$$\boldsymbol{x = v_p t} \qquad und \qquad \boldsymbol{x' = v'_p t'}$$

Diese werden nun in (14.3) und (14.4) eingesetzt:

$$\boldsymbol{v_p t} = \frac{\boldsymbol{v'_p t' + v t'}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (\boldsymbol{a}) \qquad und \qquad \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{t' + \frac{v'_p v t'}{c^2}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (\boldsymbol{b})$$

Aus (b) ergibt sich:

$$\boldsymbol{t'} = \frac{\boldsymbol{t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\boldsymbol{1 + \frac{v'_p v}{c^2}}}$$

Und in (a) eingesetzt erhalten wir:

$$\boldsymbol{v_p} = \frac{\boldsymbol{v'_p + v}}{\boldsymbol{1 + \frac{v'_p v}{c^2}}} \qquad (\boldsymbol{c})$$

Gleichung (c) steht für die relativistische Geschwindigkeitsaddition.

## 6) <u>Zwei Photonen erreichen zur gleichen Zeit Beobachter $\boldsymbol{O'}$. Ist dies auch aus der Sicht von $\boldsymbol{O}$ der Fall ? - Gleichzeitigkeit</u>

Zwei Photonen starten im Bezugssystem $\boldsymbol{O'}$ zu der Zeit $\boldsymbol{t' = 0}$ aus den Positionen $\boldsymbol{-x'_0}$ und $\boldsymbol{x'_0}$ in Richtung $\boldsymbol{O'}$. Aus (14.6) gilt für das erste und für das zweite Photon:

$$\boldsymbol{x'_1 = -x'_0 + ct'} \qquad und \qquad \boldsymbol{x'_2 = x'_0 - ct'}$$

Die beiden Photonen erreichen gleichzeitig die Position des Beobachters $\boldsymbol{O'}$ bei $\boldsymbol{x' = 0}$ nach der Zeit $\boldsymbol{t'} = {}^{\boldsymbol{x'_0}}/_{\boldsymbol{c}}$.

Die Startzeit der Photonen kann aus der Sicht des Beobachters $\boldsymbol{O}$ durch Relation (14.4) berechnet werden.

Am Startpunkt ergibt sich für das erste Photon: $\boldsymbol{t' = 0}$ und $\boldsymbol{x' = -x'_0}$.

Aus (14.4) folgt:

$$\boldsymbol{t_{01}} = \frac{\frac{-x_0' v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Am Startpunkt ergibt sich für das zweite Photon: $\boldsymbol{t' = 0}$ und $\boldsymbol{x' = x_0'}$.

Aus (14.4) folgt:

$$\boldsymbol{t_{02}} = \frac{\frac{x_0' v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Man sieht: für Beobachter $\boldsymbol{O}$ starten die Photonen nicht gleichzeitig. Das erste Photon startet früher.

Zu welchem Zeitpunkt erreichen nun die Photonen aus Sicht des Beobachters $\boldsymbol{O}$ die Position des Beobachters $\boldsymbol{O'}$?

Wir haben gesehen, dass für das erste und für das zweite Photon folgendes gilt:

$$\boldsymbol{x_1' = -x_0' + ct'} \quad \mathit{und} \quad \boldsymbol{x_2' = x_0' - ct'}$$

In (14.4) eingesetzt, erhalten wir für die Zeiten der beiden Photonen:

$$\boldsymbol{t_1} = \frac{t' + \frac{(-x_0' + ct')v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \mathit{und} \quad \boldsymbol{t_2} = \frac{t' + \frac{(x_0' - ct')v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Da es die Zeit $\boldsymbol{t'} = {x_0'}/{c}$ ist, die für beide Photonen im Bezugssystem $\boldsymbol{O'}$ verstreicht, ergibt sich:

$$\boldsymbol{t_1 = t_2} = \frac{x_0'}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_0'}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Die Photonen erreichen also auch für Beobachters $\boldsymbol{O}$ die Position des Beobachters $\boldsymbol{O'}$ gleichzeitig.

Für Beobachters $\boldsymbol{O}$ bewegt sich Beobachter $\boldsymbol{O'}$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Deswegen muss das erste Photon bis zum Beobachter $\boldsymbol{O'}$ eine längere Strecke als das zweite zurücklegen bei gleicher Geschwindigkeit $\boldsymbol{c}$. Trotzdem erreichen die Photonen den Beobachter $\boldsymbol{O'}$ gleichzeitig, weil aus der Sicht des Beobachters $\boldsymbol{O}$ das erste Photon früher startet als das zweite.