3 Herleitungen von $E = mc^2$ aus der klassischen Physik

Über $E = mc^2$ schreibt Max Born in seinem Werk „Die Relativitätstheorie Einsteins“ (fünfte Auflage, Springer-Verlag, Seite 244):

> „*Einsteins Gleichung $E = mc^2$, die die Proportionalität von Energie und träger Masse feststellt, ist oft das wichtigste Ergebnis der Relativitätstheorie genannt worden. Darum wollen wir noch einen andern einfachen Beweis dafür geben, der von Einstein selbst stammt und keinen Gebrauch vom mathematischen Formalismus der Relativitätstheorie macht [Hervorh. d. Verf.]. Dieser stützt sich auf die Tatsache der Existenz des Strahlungsdruckes. Daß eine Lichtwelle, die auf einen absorbierenden Körper auftritt, auf diesen einen Druck ausübt, folgt aus den Maxwellschen Feldgleichungen mit Hilfe eines von Poynting (1884) zuerst abgeleiteten Satzes; und zwar ergibt sich, daß der Impuls, der von einem kurzen Lichtblitz oder Lichtstoß von der Energie E auf die absorbierende Fläche ausgeübt wird, gleich E/c ist. […]* “.

Die Herleitung, die nach diesem Zitat folgt, beweist entgegen der allgemeinen Überzeugung, dass das Äquivalenzprinzip von Energie und Masse kein zwingendes Resultat der Relativitätstheorie ist, denn die von Max Born zitierte Herleitung der Gleichung $\boldsymbol{E = mc^2}$ stützt sich auf einen Satz aus dem Jahr 1884. Damals gab es nur die klassische Physik. Relativitätstheorie und Quantenmechanik wurden erst später entwickelt.

Im Folgenden möchte ich einen ähnlichen Beweis von $\boldsymbol{E = mc^2}$ wie den oben erwähnten vorstellen, der auf demselben Phänomen des sogenannten "*Strahlungsdrucks*" beruht.

Herleitung von E = mc² basierend auf dem "Strahlungsdruck".

Das verwendete Gedankenexperiment nutzt, anstelle der Wirkung der in einem Rohr emittierten Strahlung, wie von Max Born beschrieben, die Beobachtung des Phänomens der Emission und Absorption eines Lichtstrahls zwischen zwei physikalischen Körpern.

Wir betrachten ein physikalisches System, bestehend aus zwei gleichen Körpern K1 und K2 der Masse $\boldsymbol{m}$, die anfänglich in einem Abstand $\boldsymbol{l}$ voneinander ruhen.

Es wird vorausgesetzt, dass die Körper keine Energie und keine Materie mit der Umgebung austauschen. Es wird außerdem angenommen, dass auf die Körper keine äußeren Kräfte einwirken.

Wegen dieser Annahmen gelten bei beliebigen Veränderungen des inneren Systemzustandes folgende Voraussetzungen:

1. **Die Gesamtmasse des Systems bleibt unverändert**
2. **Der Schwerpunkt des Systems verharrt im Ruhezustand**

Bei gleichen Massen liegt der Schwerpunkt $\boldsymbol{B}$ des Systems genau in der Mitte zwischen den Körpern in einem Abstand $\boldsymbol{l/2}$ zu beiden, wie in Abbildung 1 dargestellt.

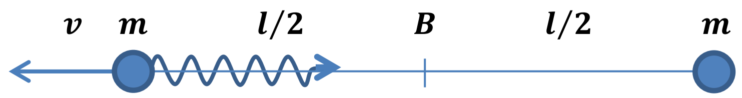

Abb. 1

(siehe Animation)

Es wird angenommen, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt der Körper K1 links einen kurzen intensiven Lichtstrahl in Richtung des Körpers K2 rechts abstrahlt.

Durch die Emission des Lichtstrahls erhält der emittierende Körper K1 einen Rückstoß und bewegt sich danach in entgegengesetzter Richtung zum Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$.

Wir setzen voraus, dass nach Ablauf der Zeit $\boldsymbol{\Delta t}$ nach der Emission der Lichtstrahl den Körper K2 erreicht hat und von diesem absorbiert wird. Während des gleichen Zeitintervalls hat der Körper K1 die Strecke $\boldsymbol{\Delta l}$ zurückgelegt. Deswegen gilt für das Zeitintervall folgende Relation ($\boldsymbol{c}$ = Lichtgeschwindigkeit):

$$\boldsymbol{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{v}}$$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{c} \qquad (3.1)$$

Abbildung 2 veranschaulicht die Lage des Systems zum Zeitpunkt der Absorption des Lichtstrahls seitens des Körpers K2.

Da laut Voraussetzung keine äußeren Kräfte auf das System wirken, hat sich inzwischen die Position des Körpers K2 nicht verändert.

Der Körper K1 links hat sich aber während der Zeitspanne $\boldsymbol{\Delta t}$ entfernt und hat nun den Abstand $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{\Delta l}$ vom Körper K2.

Bei flüchtiger Betrachtung könnte man meinen, dass sich dadurch auch der Schwerpunkt $\boldsymbol{B}$ des Systems verschoben haben muss. Das ist aber nicht möglich, da nach Voraussetzung keine äußeren Kräfte auf das System wirken.

Daraus lässt sich schlussfolgern, dass wegen der Emission des Lichtstrahls, der Körper K1 links, der sich beim größeren Abstand vom Schwerpunkt befindet, um eine bestimmte noch zu berechnende Masse $\boldsymbol{\Delta m}$ abgenommen haben muss. Da anderseits die Gesamtmasse des Systems unverändert bleibt, muss die Masse des Körpers K2 rechts zwangläufig um den gleichen Betrag $\boldsymbol{\Delta m}$ zugenommen haben.

Daraus folgt, dass nach der Absorption des Lichtstrahls die Masse des Körpers K2 gleich $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\Delta m}$ und die Masse des Körpers K1 gleich $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m}$ geworden ist.

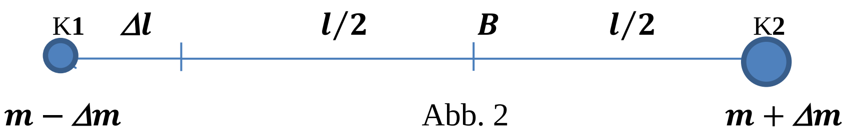

Abb. 2

Für die Position des Schwerpunkts zwischen zwei Massen wie in Abb. 2 gilt:

$$(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m})(\boldsymbol{\Delta l} + \boldsymbol{l}/\mathbf{2}) = (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\Delta m})\,\boldsymbol{l}/\mathbf{2} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{m\Delta l} - \boldsymbol{\Delta m \Delta l} + \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{l}/\mathbf{2} - \boldsymbol{\Delta m}\,\boldsymbol{l}/\mathbf{2} = \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{l}/\mathbf{2} + \boldsymbol{\Delta m}\,\boldsymbol{l}/\mathbf{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m})\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{\Delta m} \qquad (3.2)$$

Mit der Relation (3.2) verfügen wir nun über die zweite notwendige Gleichung um den Beweis herbeizuschaffen.

Die dritte, zur Herleitung des Äquivalenzprinzips erforderliche Gleichung, liefert uns der am Anfang dieses Kapitel erwähnte Satz von Poynting aus dem Jahre 1884.

Aus diesem Satz ergibt sich, dass für den Impuls $\boldsymbol{p}$ eines Lichtstrahles der Energie $\boldsymbol{E}$ gilt: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{E}/\boldsymbol{c}$.

Der Impulserhaltungssatz angewandt auf den Vorgang der Lichtstrahlemission ergibt, dass der vom linken Körper K1 erhaltene Gegenimpuls gleich dem Impuls des Lichtstrahls sein muss:

$$(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m})\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{c}} \qquad (3.3)$$

Die Verwendung von Relation (3.1) in Gleichung (3.3) ergibt:

$$(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m})\frac{\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{c}} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\Delta m})\frac{\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}} \qquad (3.4)$$

Und unter Berücksichtigung von Relation (3.2) erhalten wir dann:

$$\Delta \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}$$

Daraus lässt sich schlussfolgern:

- Die Emission eines Lichtstrahls mit der Energie $\boldsymbol{E}$ durch einen Körper bewirkt eine Abnahme der Masse des Körpers selbst, die gleich der Energie des Lichtstrahls dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist.

- Die Absorption eines Lichtstrahls mit der Energie $\boldsymbol{E}$ durch einen Körper bewirkt eine Zunahme der Masse des Körpers selbst, die gleich der Energie des Lichtstrahls dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist.

Herleitung von $E = mc^2$ basierend auf dem Doppler-Effekt

Eine weitere nicht-relativistische Herleitung des Äquivalenzprinzips von Energie und Masse stützt sich auf den Doppler-Effekt der elektromagnetischen Strahlung, so wie es in der Einleitung bereits erwähnt wurde.

Der Dopplereffekt wird in der „klassischen“ Elektrodynamik behandelt und stellt für niedrige Geschwindigkeiten der emittierenden Lichtquelle keinen relativistischen Effekt dar.

Einleitend möchte ich an klassische Betrachtungsweisen erinnern:

Die Energie eines Lichtquantums, auch Photon genannt, ist gleich dem Produkt $\boldsymbol{hf}$ und der Impuls eines Photons ist durch den Quotienten $\boldsymbol{hf\,/\,c}$ wiedergegeben. $\boldsymbol{f}$ ist die dem Photon zugeordnete Frequenz, $\boldsymbol{h}$ ist das Planck'sche *Wirkungsquantum* und $\boldsymbol{c}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Daraus folgt, dass zwischen Energie $\boldsymbol{E_f}$ und Impuls $\boldsymbol{p_f}$ eines Photons folgende Beziehung besteht: $\boldsymbol{E_f = p_f c}$.

Wir betrachten einen Körper der Masse $\boldsymbol{m_1}$, der sich relativ zu einem Beobachter mit einer niedrigen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_1 \ll c}$ bewegt.

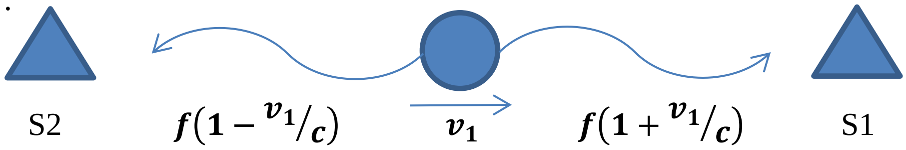

Abb. 3

Wir nehmen an, dass der Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt zwei Photonen gleicher Frequenz aussendet: ein Photon in Richtung der Bewegung, das andere in die entgegengesetzte Richtung.

Die vom Körper ausgestrahlte Energie ist dann: $\boldsymbol{E = 2hf.}$

Nach Abb. 3 gilt ferner: Ein Spektrometer S1 wird wegen des optischen Dopplereffekts eine Frequenz $\boldsymbol{f\left(1 + {}^{v_1}\!/_{c}\right)}$ für das Photon in Bewegungsrichtung messen. Ein Spektrometer S2 wird eine Frequenz $\boldsymbol{f\left(1 - {}^{v_1}\!/_{c}\right)}$ für das in die entgegengesetzte Richtung entsandte Photon messen. Nach dem Impulserhaltungssatz ergibt sich, dass der Impuls des Körpers vor der Emission gleich der Summe der Impulse des Körpers und der zwei Photonen nach der Emission sein muss. Deswegen gilt aus der Sicht des Beobachters des Gesamtsystems[1]:

$$\boldsymbol{m_1 v_1 = m_2 v_2 + \frac{hf}{c}\left(1 + \frac{v_1}{c}\right) - \frac{hf}{c}\left(1 - \frac{v_1}{c}\right)} \qquad (3.5)$$

[1] Die Herleitung wird hier mit der Verwendung der modernen Relationen $f' = f(1 + {}^{v}\!/_{c})$ und $f' = f(1 - {}^{v}\!/_{c})$ für den optischen Doppler-Effekt geführt. Stattdessen lassen sich auch die Relationen des Doppler-Fizeau-Effekts aus dem Jahre 1848 benutzen. Damals unterschied Fizeau noch, in Anlehnung an den akustischen Doppler-Effekt, zwischen der Bewegung der Lichtquelle und des Empfängers. Er sah für die Annäherung, bzw. Entfernung der Quelle die Ausdrücke $f' = f/(1 - {}^{v}\!/_{c})$ und $f' = f/(1 + {}^{v}\!/_{c})$ vor. Mit der Verwendung dieser Relationen anstatt der oben erwähnten Ausdrücke muss Gleichung (3.5) so verändert werden:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 + \frac{hf}{c\left(1 - \frac{v_1}{c}\right)} - \frac{hf}{c\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)}$$

Da diese Gleichung aus der klassischen Physik stammt, kann sie nur für $v_1 \ll c$ verwendet werden. Der Gültigkeitsbereich muss deswegen nur auf Werte von v_1 beschränkt werden, für welche resultiert, dass v_1^2/c^2 vernachlässigbar klein ist. Es folgt:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = \frac{2hf v_1}{c^2\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}$$

Da in dieser letzten Relation v_1^2/c^2, ohne Wertverlust, gleich Null gesetzt werden kann, reduziert sie sich auf Relation (3.6). Somit ist bewiesen, dass die Herleitung des Äquivalenzprinzips E-M auch mit den Relationen für den Doppler-Effekt von Fizeau aus dem Jahr 1848 geführt werden kann.

Hierbei ist der nach-links-gerichtete Impuls negativ. Daraus folgt:

$$\boldsymbol{m_1 v_1 - m_2 v_2 = 2\frac{hfv_1}{c^2}} \qquad (3.6)$$

wobei $\boldsymbol{m_2}$ die Masse und $\boldsymbol{v_2}$ die Geschwindigkeit des Körpers nach der Emission darstellen.

Wegen der symmetrischen Aussendung (zwei gleiche Photonen in entgegengesetzte Richtungen) wird es nach der Emission keine Veränderung der Geschwindigkeit des Körpers geben. Also gilt: $\boldsymbol{v_1 = v_2}$.

Die Masse des Körpers hingegen bleibt nicht unverändert, andernfalls wäre $\boldsymbol{m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0}$ und konsequenterweise auch der Term auf der rechten Seite von (3.6) gleich Null. Das könnte aber nur dann der Fall sein, wenn entgegen der Annahme zum Gedankenexperiment die Frequenz $\boldsymbol{f}$ oder die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_1}$ gleich Null wären.

Daher ergibt sich, indem in (3.6) $\boldsymbol{v_2}$ durch $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{m_1 - m_2}$ durch die Massenabnahme $\boldsymbol{\Delta m}$ ersetzt werden, folgende Gleichung:

$$\boldsymbol{\Delta m v_1 = 2\frac{hfv_1}{c^2}}$$

Nachdem $\boldsymbol{v_1}$ auf beiden Seiten dieser Gleichung durch Division eliminiert wird und unter Berücksichtigung, dass $\boldsymbol{2hf}$ die durch die Emission der Photonen ausgestrahlte Energie ist, ergibt sich die Formel, welche die Äquivalenz von Energie und Masse in dem speziellen Fall der elektromagnetischen Emission beschreibt:

$$\boldsymbol{\Delta m = \frac{E}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad E = \Delta m c^2} \qquad (3.7)$$

Das heißt:

Die ausgestrahlte Energie eines Körpers ist gleich dem Produkt seiner Massenabnahme mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit.

Die alternativen Herleitungen von Einstein und des Physikers Fritz Rohrlich stützen sich auf den Impulserhaltungssatz und auf die Wechselwirkung zwischen Materie und elektromagnetischer Strahlung. Sie bestätigen, ohne den *Gebrauch vom mathematischen Formalismus der Relativitätstheorie* zu machen, das Äquivalenzprinzip von Energie und Masse im speziellen Fall der elektromagnetischen Emission.