11 Herleitung der Längenkontraktion und der Zeitdilatation

Beim nächsten Gedankenexperiment werden wir sehen wie die Längenkontraktion in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes hergeleitet werden kann.

Zu diesem Zweck stellen wir uns den zentralen Stoß zwischen zwei Elektronen vor, die zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ einen Abstand $2\boldsymbol{l}$ zueinander haben und die sich mit gleichen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ aufeinander zubewegen, so wie links in Abbildung 15 illustriert ist.

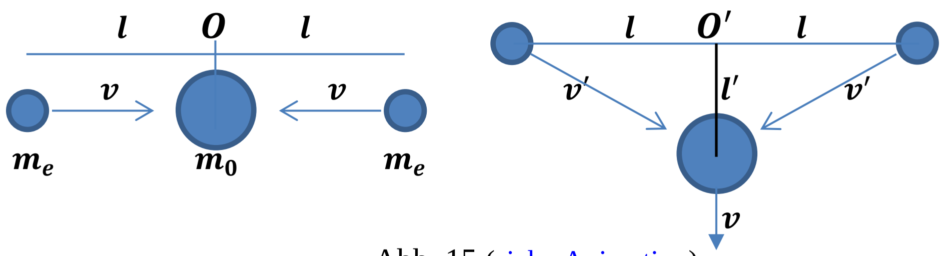

Abb. 15 (siehe Animation)

Nehmen wir an, dass sich infolge des Zusammenstoßes ein neues Teilchen mit der Masse $\boldsymbol{m_0}$ bildet. Dieses befindet sich aus der Sicht eines Beobachters $\boldsymbol{O}$ im Ursprung eines zu ihm ruhenden Bezugssystems.

Da für den Beobachter $\boldsymbol{O}$ die Länge der Strecke, die ein Teilchen bis zur Kollision zurücklegt, gleich $\boldsymbol{l}$ ist, gilt in Abhängigkeit der Zeit $\boldsymbol{t}$ bis zum Zusammenstoß: $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{vt}$.

Betrachten wir jetzt das gleiche Gedankenexperiment aus der Sicht eines zweiten Beobachters $\boldsymbol{O'}$, der in einem Bezugssystem ruht, das sich mit der gleichen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ wie die Teilchen bewegt, aber vertikal nach oben.

Da diese Bewegung in y-Richtung orthogonal zu der Bewegungsrichtung der kollidierenden Elektronen ist, messen die Beobachter $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{O'}$ in x-Richtung schauend die gleiche Länge $\boldsymbol{l}$, die gleiche Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und somit auch, bis zur Kollision, die gleiche Zeit $\boldsymbol{t}$.[1]

Während dieser Zeit bewegt sich der Beobachter im Koordinatensystem $\boldsymbol{O'}$ um die Strecke $\boldsymbol{l'}$ vorwärts, d.h. die Kollision findet für ihn auf der y-Achse um $\boldsymbol{l'}$ nach hinten versetzt statt (siehe Abbildung 15 rechts).

[1] Im Allgemeinen braucht jeder Beobachter Transformationen, um Raum und Zeit aus der Sicht eines anderen Beobachters zu erkunden. Bei der Herleitung der Längenkontraktion sind diese Transformationen noch unbekannt. Es ist trotzdem sicher, dass für Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ die Beobachter gleiche Länge und Zeiten messen. Es handelt sich hier um einen zweidimensionalen Fall. Damit wir uns besser orientieren können, nenne ich X die Achse auf dem sich die Elektronen bewegen und Y die Achse auf dem sich Beobachter $\boldsymbol{O'}$ bewegt. In zwei Dimensionen braucht jeder der zwei Beobachter eine Transformation für die X-Achse und eine Transformation für die Y-Achse, um die Längen aus der Sicht des anderen Beobachters zu berechnen. Beide Transformationen sind jeweils nur von der Komponente $\boldsymbol{v_x}$ bzw. $\boldsymbol{v_y}$ der relativen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ der Beobachter abhängig. Hier wird für beide Beobachter nur die Komponente der Bewegung der Teilchen in X-Richtung gebraucht um $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{t}$ zu berechnen. Dafür reicht die Transformation für die X-Achse aus. Die Komponente $\boldsymbol{v_x}$ der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zwischen den Beobachtern in X-Richtung ist aber gleich Null. Deswegen die Transformation für die X-Achse liefert für beide Beobachter gleiche Werte für Längen und Zeiten.

Wir setzen voraus, dass zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ die beiden Ursprünge der Koordinatensysteme $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{O'}$ zusammenfallen und dass für den Beobachter $\boldsymbol{O'}$ die Elektronen auf der nach unten gerichteten Y-Achse in dem Punkt T bei der Koordinate $\boldsymbol{l'}$ zusammenstoßen, wie Abbildung 16 zeigt.

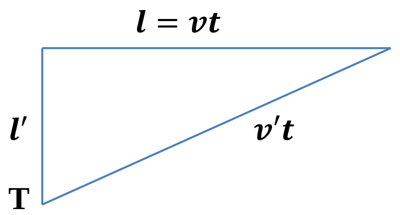

Abb. 16

Aus Abb. 16 ergibt sich[2]:

$$\boldsymbol{v'^2 = v^2 + \frac{l'^2}{t^2}} \qquad (11.1)$$

In der Gleichung (11.1) kommen zwei Unbekannte vor: die Länge $\boldsymbol{l'}$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v'}$.

Zur Berechnung der Länge $\boldsymbol{l'}$ brauchen wir deswegen eine zweite Relation, welche die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v'}$ in der schrägen Richtung nur in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ausdrückt.

Wir werden $\boldsymbol{l'}$ zuerst für eine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ erheblich niedriger als die Lichtgeschwindigkeit berechnen.

Berechnung von $\boldsymbol{l'}$ für $\boldsymbol{v \ll c}$

Wie aus Abbildung 17 zu entnehmen ist, resultiert die von Beobachter $\boldsymbol{O'}$ gemessene Geschwindigkeit $\boldsymbol{v'}$ der Elektronen für $\boldsymbol{v}$ << **c** aus der Summe von zwei zueinander orthogonalen Vektorkomponenten mit dem gleichen Betrag.

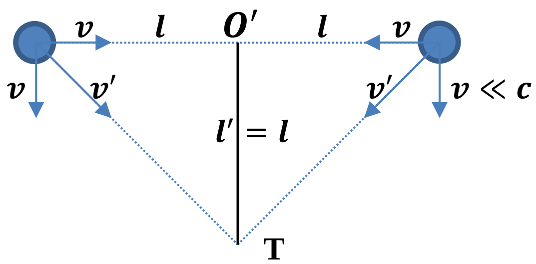

Abb. 17

[2] Das Zeitintervall $\boldsymbol{t}$, das von den Beobachtern auf der X-Achse bis zur Kollision gemessen wird, ist notwendigerweise das gleiche, das auf der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks im Abb. 16 von Beobachter $\boldsymbol{O'}$ gemessen wird. Wenn es nicht so wäre, würde Beobachter $\boldsymbol{O'}$ statt eine, zwei Kollisionen zu verschiedenen Zeitpunkten erleben, die erste auf dem schrägen Weg und die zweite als Abbildung der ersten auf der X-Achse.

Der Vektor $\boldsymbol{v'}$ hat somit eine Neigung von 45°, deswegen für $\boldsymbol{v} << \mathbf{c}$ treffen sich die Elektronen aus der Sicht von $\boldsymbol{O'}$ in dem Punkt **T** bei:

$$\boldsymbol{l' = l}$$

Unter diesen Bedingungen hat der Vektor $\boldsymbol{v'}$ den Betrag $\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{v}$, der aber etwa ab $\boldsymbol{v} \cong \mathbf{70\%}\ \mathbf{c}$ einen unzulässigen Wert größer als $\boldsymbol{c}$ annehmen würde.

Damit wird die Grenze dieser klassischen Betrachtung für $\boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{c}$ deutlich.

<u>Berechnung von $\boldsymbol{l'}$ für beliebige Geschwindigkeiten</u>

Um die Strecke $\boldsymbol{l'}$ für beliebige Geschwindigkeiten ermitteln zu können, benötigen wir eine weitere Gleichung für die unbekannte Geschwindigkeit $\boldsymbol{v'}$.

Hier hilft uns weiter, dass bei der Berechnung von $\boldsymbol{v'}$ die Erhaltung des Impulses und der Energie beachtet werden muss.

Diese Forderung ermöglicht die Berechnung der Länge $\boldsymbol{l'}$ unter relativistischen Gesichtspunkten wie folgt:

Aus der Sicht von $\boldsymbol{O}$ gilt folgendes wegen des Energieerhaltungssatzes (siehe Abbildung 15 links):

$$\boldsymbol{m_0 c^2} = \frac{\boldsymbol{2m_{0e}c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (11.2)$$

Aus der Sicht von Beobachter $\boldsymbol{O'}$ bewegt sich das gebildete Teilchen nach dem Stoß mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ entlang der Y-Achse weiter nach unten (siehe Abb. 15 rechts). Für $\boldsymbol{O'}$ ergibt sich dann (siehe auch Anhang A V):

$$\frac{\boldsymbol{m_0 c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\boldsymbol{2m_{0e}c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v'^2}{c^2}}}} \qquad (11.3)$$

Durch die Verwendung von (11.2) in (11.3) ergibt sich:

$$\frac{\boldsymbol{2m_{0e}c^2}}{\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\boldsymbol{2m_{0e}c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v'^2}{c^2}}}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{1-2\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4} = 1-\frac{v'^2}{c^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{v'^2 = 2v^2 - \frac{v^4}{c^2}} \qquad (11.4)$$

(11.4) ist die gesuchte Relation, die $\boldsymbol{v'}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{v}$ ausdrückt und wegen Gl. (11.1) folgt nun:

$$\frac{\boldsymbol{l'^2}}{\boldsymbol{t^2}} = \boldsymbol{v^2}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}\right) \qquad (11.5)$$

Da $\boldsymbol{vt = l}$ ist, kann (11.5) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\boldsymbol{l'^2} = \boldsymbol{l^2}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}\right)$$

Und daraus folgt:

$$\boldsymbol{l'} = \boldsymbol{l}\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}} \qquad (11.6)$$

Die Relation (11.6) drückt, in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie, die von der Geschwindigkeit abhängige Längenkontraktion in Bewegungs-richtung aus.

Aus Relation (11.6) lässt sich auf einfacher Weise auch die Zeitdilatation ableiten.

Für die vertikale Richtung gilt:

$$\boldsymbol{t'} = \frac{\boldsymbol{l'}}{\boldsymbol{v}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t'} = \frac{\boldsymbol{l}\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}{\boldsymbol{v}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t'} = \boldsymbol{t}\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}} \qquad (11.7)$$

Die Relation (11.7) drückt, in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie, die geschwindigkeitsabhängige Zeitdilatation aus.

> Die Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf den Zusammenstoß zweier Elektronen aus der Sicht von Beobachtern in relativer Bewegung zueinander ermöglicht es, die Relationen der relativistischen Längen-kontraktion und Zeitdilatation in Anhängigkeit von der Geschwindigkeit herzuleiten.