1 Über die Grenzen der klassischen Mechanik

Auf die Grenzen der klassischen Mechanik für die Erklärung der Naturerscheinungen wird am Anfang zahlreicher Werke zur Relativitätstheorie verwiesen. Sinngemäß gehen diese Werke oft wie folgt vor:

> In den meisten Abhandlungen wird von Experimenten ausgegangen, welche die Unveränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit in allen gleichförmig bewegten Bezugssystemen, unabhängig von ihrem Ruhe- oder Bewegungszustand, belegen.
>
> Da Beobachter in verschiedenen Bezugssystemen, trotz ihrer relativen Bewegung zueinander, die gleiche Geschwindigkeit für das Licht messen, folgt als Konsequenz, dass sie sich weder über die Gleichzeitigkeit der Ereignisse, noch über die Dimensionen der Körper einig sein können.
>
> Auf Grund dieser Erkenntnisse ist man dazu gezwungen, sich von der Vorstellung eines absoluten Raums und einer absoluten Zeit zu verabschieden.
>
> Da aber Raum und Zeit relative Größen sind, ergibt sich die Notwendigkeit, das Relativitätsprinzip der Mechanik neu zu definieren.
>
> Als Folge dieser Entwicklung werden dann Koordinatentransformationen zwischen Bezugssystemen[1] und die in ihnen beobachteten Messungen von Raum und Zeit als Funktion ihrer Geschwindigkeiten festgelegt.
>
> Daraufhin wird bestätigt, dass alle diese Hypothesen mit den experimentellen Beobachtungen bei hohen Geschwindigkeiten im Einklang stehen.
>
> Schließlich wird auf Mängel der klassischen Mechanik nicht nur im kosmischen Bereich, sondern auch im Experimentalgebiet subatomarer Teilchen hingewiesen.

Das ist im Wesentlichen das, was in den erwähnten Publikationen zur Relativitätstheorie über die klassische Mechanik behauptet wird.

Um die Unvollständigkeit der klassischen Mechanik zu beweisen, kann man aber auch einen anderen, einfacheren Weg als den gerade beschriebenen Verlauf verfolgen.

Das zweite Gesetz Newtons, aus dem die klassische Mechanik hervorgeht, wird gewöhnlich durch folgende Relation zwischen Kraft- und Beschleunigungsvektor ausgedrückt:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.1)$$

Wobei die Proportionalitätskonstante m, Masse genannt, ein Maß für die Trägheit des starren Körpers darstellt, auf den die Kraft wirkt.

[1] Es handelt sich hier um die sogenannten Lorentz-Transformationen. Sie erfüllen die zentrale Forderung der Relativitätstheorie, wonach, unabhängig von der Relativgeschwindigkeit gleichförmig bewegter Bezugssysteme, die gleichen physikalischen Gesetze herrschen müssen.

Ausgehend von der Relation (1.1), lässt sich die Energie, die auf die Masse $\boldsymbol{m}$ durch die Kraft $\boldsymbol{F}$ längs des infinitesimalen Wegelements $\boldsymbol{ds}$ übertragen wird, durch folgende Differentialgleichung ausdrücken:

$$\boldsymbol{Fds = m\frac{dv}{dt}ds = mvdv} \qquad (1.2)$$

Später werden wir sehen, dass sich durch die Integration der Relation (1.2) die kinetische Energie des Massepunktes ergibt.

Hierbei ist zu beachten, dass die Gleichungen (1.1) und (1.2) die direkte Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung eines Massepunkts voraussetzen.

Die Konsequenz dieses Ansatzes ist, dass bei Geschwindigkeitsänderungen die Trägheit des Massepunktes, auf den die Kraft wirkt, unverändert bleibt.

Ersetzt man den fiktiven Massepunkt durch reelle Atomteilchen, dann bedeutet die Annahme der Unveränderlichkeit der Trägheit in der klassischen Betrachtungsweise, dass z.B. ein Elektron durch ein starkes elektrisches Feld bis zu einer beliebig hohen Geschwindigkeit beschleunigt werden kann.

Diese Hypothese stellt sich aber für Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit als falsch heraus, wie experimentelle Beobachtungen bei Teilchenbeschleunigern zeigen.

Die Experimente ergeben, dass sich bei steigender Geschwindigkeit eine Zunahme der Teilchenträgheit feststellen lässt. Dies führt zu einer fortschreitenden Abnahme der Teilchenbeschleunigung obgleich eine unverändert konstant wirkende Kraft eine konstante Beschleunigung und damit eine weitere Zunahme der Geschwindigkeit bewirken sollte.

Für Geschwindigkeiten, die an die des Lichtes herankommen, strebt die Beschleunigung sogar gegen Null.

Die Geschwindigkeit bleibt daher so gut wie konstant. Das bedeutet, dass für hohe Geschwindigkeiten eine direkte Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung nicht mehr besteht.

Ist das grundlegende Gesetz der Mechanik also falsch?

Bei weitem nicht!

Das zweite Gesetz der Dynamik, so wie es Newton formuliert hat, ist korrekt.

In einem alten Physikbuch der Mechanik liest man treffend:

„Die ursprüngliche Formulierung des zweiten Prinzips der Dynamik durch Newton ist folgende: die auf einen Körper wirkende Kraft ist der zeitlichen Ableitung des Impulsvektors gleich."[2]

[2] Daniele Sette – Lezioni di fisica – Volume I, Seite 100, Nov. 1963. Es ließe sich darüber diskutieren, was Newton genau gemeint hat. Wichtig für diese Arbeit ist die richtige Auslegung seines Gesetzes.

In seinem berühmten Werk "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" schreibt Newton:

"*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*"

Also, „*Mutationem motus*"… und nicht „*Mutationem velocitatis*".

Das sich wie folgt deuten lässt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (1.3)$$

Die Gleichung (1.3) ist die allgemein gültige Auslegung des zweiten Prinzips der Dynamik und sollte für eine korrekte Anwendung der Mechanik, anstatt der Beziehung (1.1), verwendet werden.

In Gleichung (1.3) stellt $\vec{p}$ den Impulsvektor des starren Körpers dar. Dieser ist zu dem Produkt $m\vec{v}$ aus Masse und Geschwindigkeit gleich.

Es ist ersichtlich, dass (1.3) auf (1.1) reduziert werden kann, wenn die Masse nahezu unverändert bleibt, was für $v \ll c$ sicher gültig ist.

Für Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit hingegen, muss die Masse als Funktion der Geschwindigkeit betrachtet werden und deswegen muss differenziert werden.

Wenn die elementare Arbeit durch die Kraft F längs des infinitesimalen Wegelements ds ausgedrückt wird, ergibt sich ausgehend von (1.3) und analog zu (1.2), folgende Differentialgleichung[3]:

$$Fds = \frac{ds}{dt}dp \quad \Leftrightarrow \quad Fds = vd(mv) \quad \Leftrightarrow Fds = v\,(mdv + vdm) \quad (1.4)$$

beziehungsweise:

$$dE = Fds = mvdv + v^2dm \qquad (1.5)$$

Die Relation (1.5) ist von fundamentaler Bedeutung für die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit.

Es ist zu beachten, dass Gl. (1.5) sich zu (1.2) vereinfacht, wenn die Masse, und somit die Trägheit des Körpers, unverändert bleibt ($dm = 0$).

Im Gegensatz zur Relation (1.2) wird durch die Beziehung (1.5) berücksichtigt, dass eine Übertragung von Energie auf einen starren Körper von einer Zunahme seiner Trägheit begleitet wird, wie experimentelle Beobachtungen bei hohen Geschwindigkeiten belegen. Somit liefert Gleichung (1.5) die grundlegende Energie-Beziehung zum weiteren Aufbau der Newtonschen Mechanik für beliebige Geschwindigkeiten.

[3] Ab jetzt wird in den Formeln auf die Verwendung der Vektoren verzichtet und stattdessen werden ihre Beträge benutzt in der Annahme, dass der Weg *ds* immer parallel zur Kraft *F* verläuft.

Wir werden daher im Laufe dieses Werkes auf Relation (1.5) zurückgreifen, um folgende alternative Herleitungen zu erhalten:

- die relativistische Formel der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse (Kapitel 5)
- die kinetische und die gesamte Energie des starren Körpers (Kapitel 6)
- die Beziehung der relativistischen Beschleunigung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (Kapitel 16).

Aus Relation (1.5) lassen sich auch alle anderen relativistischen Formeln, die in dieser Arbeit betrachtet werden, indirekt ableiten.

Da die Relation (1.5) drei ungleiche Differenziale (ds, dm, dv) enthält, ist sie nur dann integrierbar, wenn eine zweite Beziehung zwischen Energie und Geschwindigkeit oder Energie und Masse bekannt ist.

Durch solch eine Relation wäre es dann möglich, eines der drei Differenziale aus (1.5) zu eliminieren und somit die Integration durchführen zu können.

Die nächsten Kapitel werden die fehlende Relation liefern und somit die Integration von der Differentialgleichung (1.5) ermöglichen.

Die meist verwendete Relation des zweiten Prinzips der Dynamik basiert auf der direkten Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung. In dieser Form ist Newtons Gesetz für die Beschreibung physikalischer Zusammenhänge bei hohen Geschwindigkeiten, bei denen eine Zunahme der Trägheit der Körper beobachtet wird, nicht geeignet. Richtig interpretiert als zeitliche Ableitung des Impulses, gewinnt das zweite Prinzip der Dynamik jedoch den Charakter eines universell gültigen Gesetzes und liefert damit den geeigneten Ausdruck, der die Massenveränderung berücksichtigt. Die daraus resultierende Differentialgleichung ist aber ohne die zweite Relation zwischen Energie und Masse nicht lösbar.