8 Geschwindigkeitsaddition kollidierender Elektronen

In diesem Kapitel wird ein Gedankenexperiment beschrieben, das auf dem unelastischen Zusammenstoß zweier Elektronen basiert.

Zwei Beobachter $\mathbf{O_e}$ und $\mathbf{O_L}$ in relativer Bewegung untersuchen das Geschehen unabhängig voneinander. Beide verwenden für ihre Berechnungen den Energieerhaltungssatz. Danach gleichen sie ihre Ergebnisse über die Ruhemasse $\boldsymbol{m_0}$ des gebildeten Teilchens, die für beide invariant ist, ab.

Somit wird aus zwei Gleichungen eine einzige Relation gebildet, welche die Relativgeschwindigkeit zwischen den Elektronen in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der einzelnen Elektronen wiedergibt.

Mit dieser Methode werden wir nun das relativistische Additionstheorem in dem besonderen Fall von gleichen Geschwindigkeiten wie folgt herleiten.

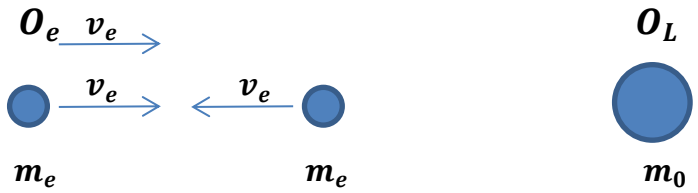

Abb. 9 (siehe Animation)

Wir stellen uns den zentralen Stoß zwischen zwei ungleichnamig geladenen Elektronen (Elektron und Positron) vor, die sich mit gleichen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v_e}$ aufeinander zubewegen.[1] Dabei wird angenommen, dass der durch die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den Elektronen verursachte Energieverlust, wegen der hohen Geschwindigkeiten vernachlässigt werden kann.

Nehmen wir an, dass sich als Folge des Zusammenstoßes ein neues Teilchen mit der Masse $\boldsymbol{m_0}$ bildet. Dieses befindet sich aus der Sicht des Beobachters $\mathbf{O_L}$ im Ruhezustand (siehe Abb. 9).

Angenommen der Beobachter $\mathbf{O_L}$ kennt die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v_e}$ der Elektronen unmittelbar vor dem Zusammenstoß, dann wird er die Masse des erzeugten Teilchens durch folgende Gleichung berechnen können, welche die Energieerhaltung vor und nach der Kollision beschreibt:

$$\boldsymbol{m_e c^2 + m_e c^2 = m_0 c^2} \qquad (8.1)$$

Das heißt: Die Energie $\boldsymbol{m_0 c^2}$ des erzeugten Teilchens ist gleich der Summe der gesamten Energien der kollidierenden Elektronen.

Unter Verwendung der Relation (5.4) ergibt sich aus Gleichung (8.1):

$$\boldsymbol{m_0 = \frac{2m_{0e}}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}} \qquad (8.2)$$

[1] Ein solches Experiment wurde bereits in den sechziger Jahren in Teilchenbeschleunigern, sogenannten Speicherringen, durchgeführt und unzählige Male wiederholt.

Wobei $\boldsymbol{m_0}$ und $\boldsymbol{m_{0e}}$ die invarianten Massen des gebildeten Teilchens und des Elektrons darstellen.

Der Beobachter $\mathbf{O}_L$ ist also in der Lage, die Masse des erzeugten Teilchens zu berechnen und kennt auch die Geschwindigkeiten der kollidierenden Elektronen. Er wird trotzdem nicht feststellen können, dass die relative Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_{ee}}$ zwischen den Elektronen gleich der Summe ihrer Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v_e + v_e}$ ist, so wie es nur für niedrige Geschwindigkeiten aus der Galilei-Transformation hervorgeht, denn das wäre nicht im Einklang mit den Erhaltungssätzen der Energie und des Impulses.

Zur Berechnung der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v_{ee}}$ zwischen den Elektronen ist es notwendig, das gleiche Gedankenexperiment aus der Sicht eines zweiten Beobachters $\mathbf{O}_e$ zu betrachten, der sich im Ruhezustand zu einem der Elektronen befindet.

Für $\mathbf{O}_e$ ergibt sich vor dem Zusammenstoß folgende Gesamtenergie $\boldsymbol{E_1}$:

$$\boldsymbol{E_1 = m_{0e}c^2 + m_{ee}c^2 = m_{0e}c^2 + \frac{m_{0e}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}}} \qquad (8.3)$$

Das heißt, die von $\mathbf{O}_e$ gemessene Energie ist gleich der Summe aus der Energie des im Ruhezustand befindlichen Elektrons und der Energie des anderen Elektrons, das der Beobachter $\mathbf{O}_e$ auf sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_{ee}}$ zukommen sieht.

Nach dem Zusammenstoß wird Beobachter $\mathbf{O}_e$, der sich weiterhin mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_e}$ zum gebildeten Teilchen bewegt, dessen Energie $\boldsymbol{E_2}$ durch folgende Relation berechnen:

$$\boldsymbol{E_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}} \qquad (8.4)$$

Indem in der Gleichung (8.4) die invariante Masse $\boldsymbol{m_0}$ durch den Ausdruck (8.2) ersetzt und, gemäß dem Energieerhaltungssatz, $\boldsymbol{E_1 = E_2}$ gesetzt wird, ergibt sich:

$$\boldsymbol{m_{0e}c^2 + \frac{m_{0e}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}} = \frac{2m_{0e}c^2}{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} \qquad (8.5)$$

Die Gleichung (8.5) kann noch vereinfacht werden, indem alle Terme durch $\boldsymbol{m_{0e}c^2}$ dividiert werden:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}} = \frac{2}{1 - \frac{v_e^2}{c^2}} - 1} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}{1 + \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

Aus diesem letzten Ausdruck ergibt sich schließlich nach einfachen algebraischen Umformungen folgende Relation:

$$v_{ee} = \frac{2v_e}{1 + \frac{v_e^2}{c^2}} \qquad (8.6)$$

Gleichung (8.6) stellt die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Teilchen dar, die sich mit gleichen Geschwindigkeiten aufeinander zubewegen und drückt somit die relativistische Addition für gleiche Geschwindigkeiten aus.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn statt des Erhaltungssatzes der Energie der Impulserhaltungssatz verwendet wird.

In diesem Fall ergibt sich für den Impuls vor und nach der Kollision aus Sicht des Beobachters $\mathbf{O}_e$:

$$m_{ee}v_{ee} = \frac{m_0 v_e}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

Und unter Verwendung von (5.4) und (8.2):

$$\frac{m_{0e}v_{ee}}{\sqrt{1 - \frac{v_{ee}^2}{c^2}}} = \frac{2m_{0e}v_e}{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}$$

Diese letzte Gleichung nach v_{ee} aufgelöst ergibt dann die Relation (8.6) (Für Details siehe A III im Anhang).

Ich möchte an dieser Stelle ausdrücklich betonen, dass die Relation (8.6) durch die einfache Verwendung des Energieerhaltungssatzes und ohne den Gebrauch der Axiome der Speziellen Relativitätstheorie hergeleitet wurde.

Die Relation (8.6) zeigt, dass sich die relative Geschwindigkeit bei niedrigen Geschwindigkeiten (z.B. im Fall zweier Züge), also wenn der Term $\frac{v_e^2}{c^2}$ vernachlässigbar ist, tatsächlich als Summe der Geschwindigkeiten mit guter Genauigkeit ergibt (grüne Kurve in Abbildung 10).

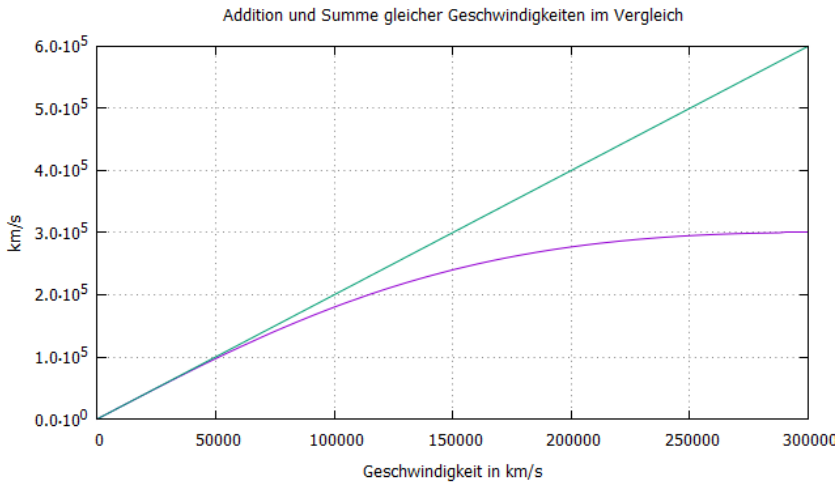

Abb. 10

Aus der Relation (8.6) lässt sich jedoch im Allgemeinen folgende Schlussfolgerung ziehen:

Geschwindigkeiten können nicht algebraisch addiert werden.

Für die Addition gleicher Geschwindigkeiten kann die Relation (8.6) verwendet werden, die, anders als die einfache algebraische Addition, im Einklang mit den Erhaltungssätzen der Energie und des Impulses steht (violette Kurve).

Es ist leicht zu zeigen, dass, gemäß der Beziehung (8.6), die relative Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_{ee}}$ zwischen zwei Teilchen die Lichtgeschwindigkeit zwar erreichen, aber nicht überschreiten kann.

Die relative Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_{ee}}$ erreicht die Lichtgeschwindigkeit nämlich nur dann, wenn die kollidierenden Teilchen masselos sind und daher $\boldsymbol{v_e}$ gleich $\boldsymbol{c}$ ist.

Wenn angenommen wird, dass die Geschwindigkeiten der kollidierenden Teilchen verschieden sind, dann kann für diesen Fall eine analoge Herleitung durchgeführt werden. Diese ist allerdings, algebraisch gesehen, komplizierter (siehe Kapitel 10).

Angenommen die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{v_2}$ sind nicht gleich, dann werden wir sehen, dass ihre Addition zum folgenden Ergebnis führt:

$$\boldsymbol{v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}} \qquad (8.7)$$

Die Relation (8.7) ist zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition äquivalent und reduziert sich für $\boldsymbol{v_1 = v_2}$ auf Gleichung (8.6).

Daraus lässt sich schließen, dass die Gleichung (8.6) eine erste Bestätigung der Formel (8.7) für gleiche Geschwindigkeiten darstellt.

> Die Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf den Zusammenstoß zweier Elektronen stellt eine erste Bestätigung des relativistischen Additionstheorems der Geschwindigkeiten dar.