16 Geschwindigkeitsabhängigkeit der Beschleunigung

Im Kapitel 2 wurde schon darauf hingewiesen, dass das zweite Prinzip der Dynamik in Verbindung mit der relativistischen Massenformel (5.4) zur Relation der relativistischen Beschleunigung führt (siehe Anhang A II).

Zur Berechnung der Beschleunigung wird auch in diesem Abschnitt das zweite Gesetz der Dynamik verwendet, welches sich, wie im ersten Kapitel dargelegt wurde, im allgemeineren Fall durch folgende Relation ausdrücken lässt:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (16.1)$$

Zur Herleitung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Beschleunigung werden im Folgenden zwei Beweise vorgeführt:

Im ersten Beweis wird der Einfachheit halber der Fall betrachtet, bei dem sich ein physikalischer Körper in die gleiche Richtung der auf ihn wirkenden Kraft bewegt.

Bei diesem ersten Fall wird eine Herleitung vorgeführt, die auf einer rein skalaren Berechnung beruht und die dazu geeignet ist, die Bewegung von Teilchen in Linearbeschleunigern zu beschreiben.

Im zweiten Fall wird eine vektorielle Berechnung zur Herleitung der zwei Vektorkomponenten (longitudinale und transversale Komponente) der Beschleunigung betrachtet. Dieser zweite Beweis deckt die Situationen, bei denen sich ein physikalischer Körper **nicht** in die gleiche Richtung der auf ihn wirkenden Kraft bewegt, so wie es z.B. bei der Bewegung von Himmelskörpern vorkommt.

Beide Fälle eignen sich zu zeigen, dass **das zweite Prinzip der Dynamik die grundlegende Relation zur Berechnung der relativistischen Beschleunigung darstellt.**

Fall 1. Skalare Berechnung.

Auch in dieser Herleitung werden wir uns nur auf geradlinige Bewegungen beschränken, bei welchen, wie es in Linearbeschleunigern der Fall ist, der Weg der Teilchen in der gleichen Richtung der Kraft verläuft.

In diesem Fall lässt sich Relation (16.1) in skalarer Form verwenden:

$$F = v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt} \qquad (16.2)$$

Da der Weg in die gleiche Richtung wie die Kraft verläuft, kann Relation (5.1) (siehe Kapitel 5) für die infinitesimale Arbeit verwendet werden:

$$Fds = c^2 dm \qquad (5.1)$$

Aus (5.1) folgt:

$$dm = \frac{Fvdt}{c^2} \qquad (16.3)$$

Es werden nun Relation (16.3) und die relativistische Massenformel $\boldsymbol{m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ in (16.2) eingesetzt und gekürzt:

$$\boldsymbol{F = \frac{v^2}{c^2}F + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}}$$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{F = \frac{m_0 a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}} \qquad (16.4)$$

Aus Gleichung (16.4) lässt sich die Formel der geradlinigen Beschleunigung als Funktion der Geschwindigkeit ableiten:

$$\boldsymbol{a = \frac{F}{m_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (16.5)$$

Man kann leicht feststellen, dass sich (16.5) zur skalaren Form der Relation (1.1) vereinfachen lässt, wenn $\boldsymbol{v \ll c}$ ist.

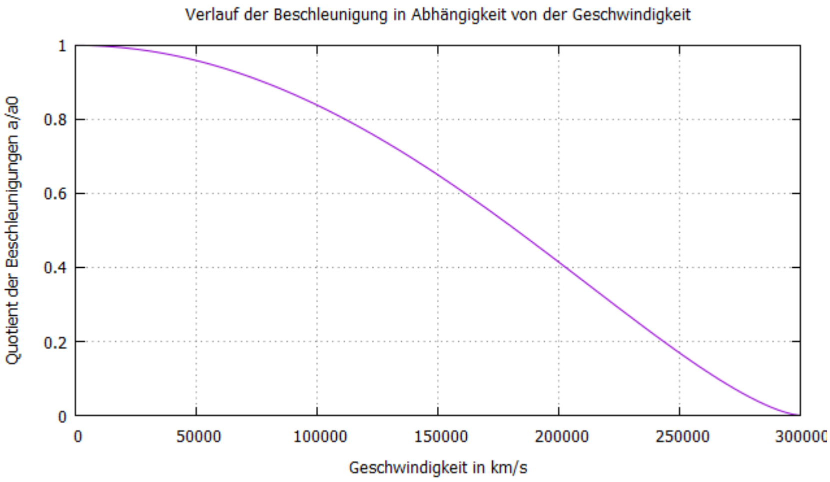

Abb. 25

Gleichung (16.5) zeigt, dass bei konstanter Kraft und zunehmender Geschwindigkeit die Beschleunigung graduell abnimmt und in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit gegen Null strebt (Abb. 25).

Dieses Ergebnis befindet sich in Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen, die z.B. in den Teilchenbeschleunigern gemacht werden können.

Es ist interessant zu bemerken, dass die Relation (16.5) auch aus der zur Berechnung der kinetischen Energie verwendeten Differentialgleichung (6.3) aus Kapitel 6 abgeleitet werden kann:

$$\boldsymbol{Fds} = \frac{\boldsymbol{m_0 v}}{\left(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{dv} \qquad (6.3)$$

Man erhält die Relation (16.5) mit folgenden Schritten:

(i) Ersetze in (6.3) die infinitesimale Wegstrecke $\boldsymbol{ds}$ durch das Produkt der Geschwindigkeit mit dem Differenzial der Zeit $\boldsymbol{vdt}$

(ii) ersetze das Differenzial der Geschwindigkeit $\boldsymbol{dv}$ durch das Produkt der Beschleunigung mit dem Differenzial der Zeit $\boldsymbol{adt}$,

(iii) kürze einmal und

(iv) löse schließlich nach der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ hin auf.

<u>Fall 2. Vektorielle Berechnung.</u>

Falls der Weg nicht in die gleiche Richtung der Kraft verläuft, muss die Relation (5.1) für die infinitesimale Arbeit folgendermaßen geschrieben werden:

$$\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{c^2 dm} \qquad (16.6)$$

Wobei $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ das Skalarprodukt aus *Kraft- und* infinitesimalem Wegvektor darstellt.

Aus (16.6) folgt:

$$\frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{c^2}} \qquad (16.7)$$

Es werden nun Relation (16.7) und die relativistische Massenformel $\boldsymbol{m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ in (16.1) eingesetzt und gekürzt:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{c^2}}\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{\boldsymbol{m_0}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{dt}} \qquad (16.8)$$

Bei der folgenden Vektorberechnung werden wir für alle Vektoren die parallele Komponente (longitudinale Komponente) und die senkrechte Komponente (transversale Komponente) zur Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}}$ verwenden:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_T} \end{pmatrix}; \qquad \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_L} \\ \boldsymbol{a_T} \end{pmatrix}; \qquad \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Gleichung (16.8) führt zu:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_T} \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{c^2}}\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \frac{\boldsymbol{m_0}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_L} \\ \boldsymbol{a_T} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} F_L \\ F_T \end{pmatrix} - \frac{F_L v}{c^2}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} a_L \\ a_T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Da $F_L \parallel v$ folgt:

$$\begin{pmatrix} F_L \\ F_T \end{pmatrix} - \frac{v^2}{c^2}\begin{pmatrix} F_L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} a_L \\ a_T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (1-\frac{v^2}{c^2})F_L \\ F_T \end{pmatrix} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} a_L \\ a_T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Daraus folgt für die longitudinale und für die transversale Komponente der Beschleunigung:

$$a_L = \frac{F_L}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad und \quad a_T = \frac{F_T}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (16.9)$$

Abbildung 26 zeigt die Verläufe der longitudinalen und der transversalen Vektorkomponente der relativistischen Beschleunigung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Auch diese Relationen stimmen mit denen überein, die mit dem „mathematischen Formalismus der Relativitätstheorie“ hergeleitet wurden.

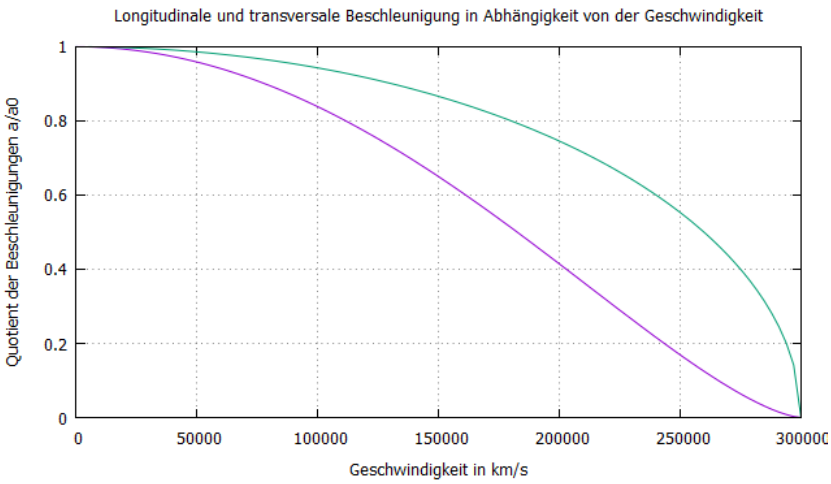

Abb. 26

Die Definition des zweiten Prinzips der Dynamik in seiner allgemeinen Form ermöglicht es, den Ausdruck der Beschleunigung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit abzuleiten. Der Verlauf der Kurven in den Abbildungen zeigt, dass für Geschwindigkeiten nahe an der Lichtgeschwindigkeit die Beschleunigung gegen Null strebt, so wie es auch durch experimentelle Beobachtungen bestätigt wird.