10 Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Die konventionellen Verfahren zur Herleitung des Additionstheorems der Geschwindigkeiten basieren auf Transformationen. Im fünften Kapitel wurde aber festgestellt, dass wir im weiteren Verlauf dieser Abhandlung auf die Hilfe jeglicher Transformation verzichten müssen, weil einerseits die Galilei-Transformation nur für niedrige Geschwindigkeiten anwendbar ist und andererseits eine Transformation für beliebige Geschwindigkeiten noch nicht hergeleitet worden ist. Wir sind somit nur auf die Verwendung der Erhaltungsätze für Masse, Energie und Impuls angewiesen.

Zur Addition der Geschwindigkeiten unterscheiden wir zwischen zwei Fällen: Fall 1. für niedrige und Fall 2. für beliebige Geschwindigkeiten. Aus dem Fall 1. dürfte es klar werden, was für eine Methode verwendet wird.

Wir nehmen an, dass infolge des zentralen Stoßes zweier Teilchen $\boldsymbol{T_1}$ der Masse $\boldsymbol{m_1}$ und $\boldsymbol{T_2}$ der Masse $\boldsymbol{m_2}$ ein Forscher $\boldsymbol{O}$ die Bildung eines neuen Teilchens $\boldsymbol{T}$ der Masse $\boldsymbol{m_0}$ beobachtet, das im Ruhezustand zu ihm bleibt. Ein zweiter Beobachter $\boldsymbol{O_1}$ befindet sich im Ruhezustand zum Teilchen $\boldsymbol{T_1}$.

Fall 1. Addition für niedrige Geschwindigkeiten

Wir stellen uns einen Physiker vor, der das Additionstheorem der Geschwindigkeit im Rahmen der klassischen Mechanik alternativ herleiten möchte und zwar ohne Verwendung der Galilei-Transformation, die er nicht kennt oder deren Korrektheit er nicht traut. Er bezieht sich auf das Gedankenexperiment von Abb. 14 und verwendet nur die Erhaltungssätze für Masse und Impuls der klassischen Mechanik. Für Beobachter $\boldsymbol{O}$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{m_0 = m_1 + m_2} \quad (\boldsymbol{a}) \qquad \boldsymbol{und} \qquad \boldsymbol{m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0} \quad (\boldsymbol{b})$$

Wenn $\boldsymbol{v_{12}}$ die Geschwindigkeit von $\boldsymbol{T_2}$ aus der Sicht von Beobachter $\boldsymbol{O_1}$ ist, dann gilt für ihn folgendes:

$$\boldsymbol{m_2 v_{12} = m_0 v_1} \qquad (\boldsymbol{c})$$

Durch Verwendung von Relation (a) in (c) ergibt sich:

$$\boldsymbol{m_2 v_{12} = m_1 v_1 + m_2 v_1} \qquad (\boldsymbol{d})$$

Aus Relation (b) erhalten wir: $\boldsymbol{m_1 v_1 = m_2 v_2}$ und das in Gleichung (d) eingesetzt ergibt:

$$\boldsymbol{v_{12} = v_1 + v_2}$$

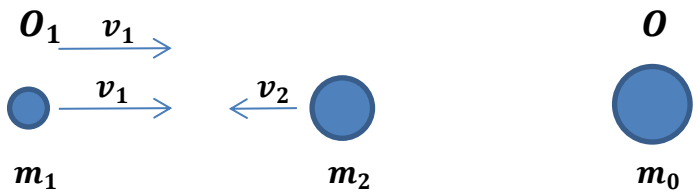

Abb. 14 (siehe Animation)

Es wird nun gezeigt, wie durch die Verwendung einer analogen Methode das relativistische Additionstheorem für beliebige Geschwindigkeiten hergeleitet werden kann.

Fall 2. Addition für beliebige Geschwindigkeiten

Zur Herleitung des relativistischen Additionstheorems der Geschwindigkeiten wird im nächsten Gedankenexperiment der Energie- und Impulserhaltungssatz auf den Zusammenstoß von zwei *ungleichen* Teilchen angewandt.

Wir werden sehen, dass das etwas kompliziertere Rechenverfahren, als das im Kapitel 8 für gleiche Massen und Geschwindigkeiten verwendete, zur Relation (8.7) führt.

Angenommen $\boldsymbol{m_{01}}$, $\boldsymbol{m_{02}}$ sind die invarianten Massen und $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ sind die Geschwindigkeiten von $\boldsymbol{T_1}$ und $\boldsymbol{T_2}$, dann wird der Beobachter $\boldsymbol{O}$ wegen der Energieerhaltung folgende Beziehung für die Masse $\boldsymbol{m_0}$ von $\boldsymbol{T}$ feststellen:

$$\boldsymbol{m_0 c^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2} \qquad \Rightarrow$$

Oder unter Verwendung der Relation (5.4):

$$\boldsymbol{m_0 = \frac{m_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}} \qquad (10.1)$$

Andererseits, da der Impuls des Teilchens $\boldsymbol{T}$ gleich Null ist, gilt wegen der Impulserhaltung vor und nach dem Zusammenstoß:

$$\boldsymbol{\frac{m_{01} v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{m_{02} v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = 0} \qquad (10.2)$$

Wenn $\boldsymbol{v_x/c}$ durch $\boldsymbol{\beta_x}$ ersetzt wird, ergibt sich dann:

$$\boldsymbol{\frac{m_{01}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \frac{\beta_2}{\beta_1}} \qquad (10.3)$$

Nachdem die rechte Seite der Gleichung (10.3) in die Gleichung (10.1) eingesetzt und der Term $\boldsymbol{\frac{m_{02}}{\sqrt{1-\beta_2^2}}}$ ausgeklammert worden ist, ergibt sich:

$$\boldsymbol{m_0 = \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)} \qquad (10.4)$$

Anders als (10.1), drückt die Gleichung (10.4) den Wert der invarianten Masse des gebildeten Teilchens $\boldsymbol{T}$ in Abhängigkeit von nur einer der Massen der kollidierenden Teilchen aus. Wir werden noch im Laufe dieser Herleitung auf dieses Zwischenergebnis zurückgreifen.

Wir nehmen nun einen zweiten Beobachter $\boldsymbol{O_1}$ an, der sich im Ruhezustand zum Teilchen $\boldsymbol{T_1}$ befindet. Dieser kann die relative Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_{12}}$ zwischen $\boldsymbol{T_1}$ und $\boldsymbol{T_2}$ durch die

Anwendung der Impulserhaltung vor und nach der Kollision der Teilchen wie folgt berechnen:

Da sich der Beobachter $\boldsymbol{O_1}$ im Ruhezustand zu $\boldsymbol{T_1}$ befindet, ist der von ihm gemessene Impuls $\boldsymbol{p_1}$ vor dem Zusammenstoß nur der des Teilchens $\boldsymbol{T_2}$ mit Masse $\boldsymbol{m_{02}}$, welches sich gegen $\boldsymbol{O_1}$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_{12}}$ bewegt:

$$\boldsymbol{p_1 = \frac{m_{02} v_{12}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12}^2}{c^2}}}}$$

Nach der Kollision bewegt sich $\boldsymbol{O_1}$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_1}$ gegen Teilchen $\boldsymbol{T}$ weiter. Deswegen ist der von $\boldsymbol{O_1}$ gemessene Impuls $\boldsymbol{p_2}$ nur der des Teilchens $\boldsymbol{T}$ mit Masse $\boldsymbol{m_0}$:

$$\boldsymbol{p_2 = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}}$$

Wegen des Impulserhaltungssatzes muss der Impuls vor und nach dem Zusammenstoß gleichbleiben ($\boldsymbol{p_1 = p_2}$). Daraus folgt:

$$\boldsymbol{\frac{m_{02} v_{12}}{\sqrt{1 - \frac{v_{12}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}} \qquad \Rightarrow$$

Um die nachfolgenden Berechnungen leichter nachvollziehen zu können, wird nun $\boldsymbol{v_x/c}$ durch $\boldsymbol{\beta_x}$ ersetzt:

$$\boldsymbol{\frac{m_{02} \beta_{12}}{\sqrt{1 - \beta_{12}^2}} = \frac{m_0 \beta_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}} \qquad (10.5)$$

(Siehe von dieser Stelle an auch eine Herleitung im Anhang A IV, die auf dem Energieerhaltungssatz basiert).

Der Term für $\boldsymbol{m_0}$ aus (10.4) wird nun in die Gleichung (10.5) eingesetzt:

$$\boldsymbol{\frac{m_{02}\ \beta_{12}}{\sqrt{1 - \beta_{12}^2}} = \frac{m_{02}}{\sqrt{1 - \beta_1^2}\sqrt{1 - \beta_2^2}} \beta_1 \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)} \qquad \Rightarrow$$

Nun kann $\boldsymbol{m_{02}}$ auf beiden Seiten gekürzt werden und die Klammer mit dem Faktor $\boldsymbol{\beta_1}$ kann vereinfacht werden:

$$\boldsymbol{\frac{\beta_{12}}{\sqrt{1 - \beta_{12}^2}} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}\sqrt{1 - \beta_2^2}}} \qquad \Rightarrow$$

Zur Auflösung der Wurzeln werden nun beide Terme links und rechts quadriert:

$$\frac{\boldsymbol{\beta_{12}^2}}{\boldsymbol{1-\beta_{12}^2}} = \frac{\boldsymbol{\beta_1^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2}}{\boldsymbol{1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta_{12}^2-\beta_{12}^2\beta_1^2-\beta_{12}^2\beta_2^2+\beta_{12}^2\beta_1^2\beta_2^2} =$$
$$\boldsymbol{=\beta_1^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2-\beta_{12}^2\beta_1^2-2\beta_{12}^2\beta_1\beta_2-\beta_{12}^2\beta_2^2}$$

Schließlich werden die Terme $\boldsymbol{\beta_{12}^2\beta_1^2}$ und $\boldsymbol{\beta_{12}^2\beta_2^2}$, die mit gleichen Vorzeichen auf beiden Seiten der Gleichung vorkommen, eliminiert. Außerdem wird der Term $\boldsymbol{2\beta_{12}^2\beta_1\beta_2}$ von der rechten zur linken Seite der Gleichung transferiert.

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{\beta_{12}^2+2\beta_{12}^2\beta_1\beta_2+\beta_{12}^2\beta_1^2\beta_2^2=\beta_1^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta_{12}^2\left(1+2\beta_1\beta_2+\beta_1^2\beta_2^2\right)=\beta_1^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2}$$

Es lässt sich leicht feststellen, dass die linke und rechte Seite der Gleichung jeweils Quadrate von binomischen Formeln enthalten.

$$\boldsymbol{\beta_{12}^2(1+\beta_1\beta_2)^2=(\beta_1+\beta_2)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta_{12}=\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}}$$

Schließlich ergibt sich durch Ersetzen von $\boldsymbol{\beta_x}$ durch $\boldsymbol{v_x/c}$ die Relation der Geschwindigkeitsaddition:

$$\boldsymbol{v_{12}=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}} \qquad (10.6)$$

Die Relation (10.6) stimmt mit dem relativistischen Additionstheorem der Geschwindigkeiten von Einstein überein.

Zum gleichen Ergebnis führt natürlich auch eine Herleitung, die auf dem Energieerhaltungssatz basiert (siehe A IV im Anhang).

Hier sei noch einmal hervorgehoben, dass die Gleichung (10.6) nur durch die Verwendung der Erhaltungssätze hergeleitet worden ist. Das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist hingegen nicht benutzt worden.

> Die Anwendung des Energie- und Impulserhaltungssatzes auf den zentralen Stoß zweier Teilchen ermöglicht es, das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten im allgemeinen Fall herzuleiten, ohne das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu verwenden zu müssen.